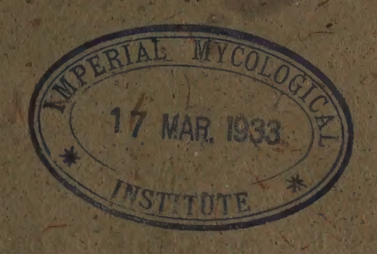
8/H

1932 № 8

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК



BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES
DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION

Н. А. Хлебникова. О жаростойкости растений.
ИМЕН, 1932, № 8, стр. 1127.

N. Chlebnikova. Sur la stabilité des plantes envers la chaleur.
BAS-MN, 1932, № 8, p. 1127 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Сентябрь 1932 г.

Непременный секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров
Ученый корректор А. В. Суслов

Сдано в набор в июне 1932 г. — Подписано к печати 16 сентября 1932 г.

134 (1029—1162) стр. (12 фиг.) + 1 табл.
Формат бум. 72 × 110 см. — 8⁶/₈ печ. л. — 42 000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 2000
Ленгорлит № 46818. — АНИ № 240. — Заказ № 1674
Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE QUELCONQUE D'UNE FONCTION INCONNUE AUX DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES

Par C. RUSSYAN

(Présenté par S. Bernstein, *membre de l'Académie des Sciences)*

Lagrange, ayant donné la méthode de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue aux deux variables indépendantes en la reduisant à celle d'une équation aux trois différentielles totales, a suggeré l'idée de la méthode de l'intégration des équations aux dérivées partielles de l'ordre quelconque par la réduction à celle des équations aux différentielles totales. *

Pfaff a rempli cette idée dans le cas d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue du nombre arbitraire de variables indépendantes,** dans ce cas ainsi que dans celui du système d'équations du premier ordre le nombre d'équations aux différentielles totales est égal à un.

Dans le cas de l'équation de l'ordre plus élevé la question se réduit à l'intégration du système d'équations aux différentielles totales ou, comme on dit, d'équations de Pfaff, dont la théorie n'est pas encore développée, et cette réduction n'atteint pas encore le but. Mais dans le cas de la fonction inconnue aux deux variables indépendantes le système obtenu est relativement simple.

Dans les «Communications de la Société Mathématique de Kharkoff» (an 1928) j'ai éxposé cette méthode dans le cas pour l'équation aux dérivées partielles du second ordre. Elle contient les résultats de la méthode des caractéristiques*** et ceux de la méthode de I. König,**** et encore des

* Mémoires de l'Académie de Berlin, 1772. Oeuvres, t. III.

** Abhandlungen der K.-P. Academie der Wissenschaften zu Berlin, 1814—1815.

*** V. par exemple E. Goursat: Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, 1898.

**** Mathematische Annalen, Bd. XXIV.

nouveaux. J'expose dans le mémoire présent cette méthode dans ce cas au moins dans les traits principaux pour l'équation de l'ordre arbitraire n

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \cdots p_{1n-1}, p_{0n})$$
$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right).$$

Le point de départ est la recherche de son intégrale complète. La question se réduit à la recherche des $n-1$ fonctions indépendantes

$$u_i(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \cdots p_{0n}) \quad i = 1 \cdots n-1$$

des variables indépendantes

$$x, y, z, p_{10}, p_{01}, \cdots p_{0n}$$

après lesquelles il ne faut qu'intégrer les systèmes d'équations différentielles ordinaires.

Quant à cette recherche il y a à distinguer les deux cas: dans le premier cas ces fonctions doivent satisfaire aux équations aux dérivées partielles du second ordre linéaires par rapport aux dérivées secondes de chacque fonction; dans ce cas il n'existe qu'une seule intégrale complète de l'équation donnée qui satisfait au système d'équations de l'ordre n

$$u_i(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \cdots p_{0n}) = c_i \qquad i=1 \, .. n-1$$
$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right).$$

Dans le second cas ces fonctions doivent satisfaire aux équations aux dérivées partielles du premier ordre linéaires par rapport aux dérivées de chaque fonction; dans ce cas il existe plusieurs intégrales complètes distinctes de l'équation donnée qui satisfont au système de l'ordre n

$$u_i(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \cdots p_{0n}) = c_i \qquad i=1 \, .. n-1$$
$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right).$$

en appelant «distinctes» ces intégrales complètes qui ne s'obtiennent pas l'une de l'autre par la transformation des constantes arbitraires. Je dis que dans ce cas les équations de l'ordre n

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \cdots p_{0n}),$$
$$u_i(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \cdots p_{0n}) = c_i \qquad i=1 \, .. n-1$$
$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right)$$

sont en involution.

Je ne traite que le second cas en me bornant par la simple indication au premier cas. Le second cas est lié avec la méthode des caractéristiques.

Dans le premier paragraphe j'expose la méthode de la recherche de l'intégrale complète de l'équation donnée, où j'arrive à la nécéssité de distinguer ces deux cas. Dans le deuxième paragraphe j'intègre le système en involution.

§ 1. Soit donnée l'équation aux dérivées partielles de l'ordre n d'une fonction inconnue aux deux variables indépendantes dans la forme résolue

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n-1}, p_{n-1}, \ldots p_{0n}) \qquad \text{(I)}$$
$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}\right).$$

Si $z = f(x_1 y)$ est son intégrale, alors les

$$\frac{n(n+1)}{1} + n = N$$

équations finies

$$z = f(x_1 y) \quad p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \, \partial y^k} \quad (i + k \leq n, \quad i \leq n - 1)$$

constituent le système de N intégrales du système pfaffien de

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

équations indépendantes

$$\Omega^{(0)} = dz - p_{10}\,dx - p_{01}\,dy = 0,$$
$$\Omega_0^{(1)} = dp_{10} - p_{20}\,dx - p_{11}\,dy = 0, \quad \Omega_1^{(1)} = dp_{01} - p_{11}\,dx - p_{02}\,dy = 0$$
$$\Omega_0^{(2)} = dp_{20} - p_{30}\,dx - p_{21}\,dy = 0, \quad \Omega_1^{(2)} = dp_{11} - p_{21}\,dx - p_{12}\,dy = 0,$$
$$\Omega_2^{(2)} = dp_{02} - p_{12}\,dx - p_{03}\,dy = 0,$$
$$\text{(I}'\text{)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Omega_0^{(n-1)} = dp_{n-10} - \theta dx - p_{n-11}\,dy = 0, \ldots$$
$$\Omega_{n-1}^{(n-1)} = dp_{0n-1} - p_{1n-1}\,dx - p_{0n}\,dy = 0.$$

aux $N + 2$ variables $x, y, z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{0n}$ et aux $\frac{n(n+1)}{2} + 2$ différentielles $dx, dy, dz, dp_{10}, dp_{01}, \ldots dp_{0n-1}$. Inversement, tout systéme de N intégrales de ce système pfaffien résolubles par rapport aux N variables $z, p_{10}, p_{01} \ldots p_{0n}$ donne après cette résolution l'intégrale $z = f(x, y)$ de l'équation donnée (I). Si la fonction $z = f(x, y, c_1 \ldots c_N)$ renfermant les N

constantes arbitraires $c_1 \ldots c_N$ est son intégrale complète s. à d. telle que les N équations

$$z = f(x, y, c_1 \ldots c_N), \quad p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \, \partial y^k} \quad (i + k \leq n, \quad i \leq n - 1)$$

sont résolubles par rapport à elles, les N équations obtenues

$$u_i(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n}) = c_i \qquad i = 1 \ldots N$$

constituent le système de N intégrales complètes du système pfaffien (I') résolubles par rapport aux $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n}$. La proposition inverse est aussi vraie.

Pour avoir l'intégrale complète de l'équation donnée (I) nous chercherons le système de N intégrales complètes du système pfaffien (I') résolubles par rapport aux $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n}$.

Soit

$$u_i(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n}) = c_i \qquad i = 1 \ldots N$$

un tel système. Le système pfaffien (I') de $\frac{n(n+1)}{2}$ équations indépendantes étant conséquence de celui

$$du_i = 0 \qquad i = 1 \ldots N$$

de $N = \frac{n(n+1)}{2} + n$ équations indépendantes on peut choisir parmi les fonctions $u_i i = 1 \ldots N$ les n telles p. ex. $u_1 \ldots u_n$, que les N équations du système pfaffien

$$\Omega^{(0)} = 0, \quad \Omega_0^{(1)} = 0, \quad \Omega_1^{(1)} = 0, \ldots \quad \Omega_{n-1}^{(n-1)} = 0, \quad du_1 = 0 \ldots du_n = 0 \quad \text{(II)}$$

sont linéairement indépendantes.

Comme les équations (I') sont indépendantes par rapport aux

$$dz, \ldots dp_{0n-1}$$

et ne contiennent pas de

$$dp_{n-11}, \ldots dp_{0n}$$

la condition nécéssaire et suffisante pour les fonctions $u_i \ldots u_n$ est que

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_n)}{\partial(p_{n-11}, \ldots p_{0n})} \neq 0$$

étant

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_N)}{\partial(z p_{01} \ldots p_{0n})} \neq 0.$$

Le système pfaffien (II) de N équations indépendantes possédant les N intégrales complètes $u_i = c_i$ $i = 1 \dots N$ doit être complètement intégrable. Cela donne les conditions pour les fonctions choisies $u_i, \dots u_n$. La condition nécéssaire et suffisante pour que le système pfaffien quelconque de m équations indépendantes

$$X_1^i(x_1 \dots x_p)\,dx_1 + \cdots + X_p^i(x_1 \dots x_p)\,dx_p = 0$$
$$i = 1 \dots m$$

soit complètement intégrable est que soient nuls identiquement tous les déterminants symboliques du dégré $m + 2$

$$\begin{vmatrix} X_r^1 & \dots\dots & X_s^1 \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ X_r^m & \dots\dots & X_s^m \\ \dfrac{\partial}{\partial x_r} & \dots\dots & \dfrac{\partial}{\partial x_s} \\ X_r^i & \dots\dots & X_s^i \end{vmatrix}^{*} \qquad \begin{matrix} r_1 \dots s = 1 \dots p, \\ i = 1 \dots m. \end{matrix}$$

Ces conditions ont dans notre cas la forme

$$\begin{vmatrix}
-p_{10} & -p_{01} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-p_{20} & -p_{11} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-p_{11} & -p_{02} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-p_{1n-2} & -p_{01-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-\theta & -p_{n-11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-p_{n-11} & -p_{n-22} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-p_{1n-1} & -p_{0n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{10}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{01}} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n-2}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{n-10}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{n-21}} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}} & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dfrac{\partial u_n}{\partial x} & \dfrac{\partial u_n}{\partial y} & \dfrac{\partial u_n}{\partial z} & \dfrac{\partial u_n}{\partial p_{10}} & \dfrac{\partial u_n}{\partial p_{01}} & \dots & \dfrac{\partial u_n}{\partial p_{0n-2}} & \dfrac{\partial u_n}{\partial p_{n-10}} & \dfrac{\partial u_n}{\partial p_{-n21}} & \dots & \dfrac{\partial u_n}{\partial p_{0n-1}} & \dfrac{\partial u_n}{\partial p_{n-11}} & \dots & \dfrac{\partial u_n}{\partial p_{0n}} \\
\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial p_{10}} & \dfrac{\partial}{\partial p_{01}} & \dots & \dfrac{\partial}{\partial p_{0n-2}} & \dfrac{\partial}{\partial p_{n-10}} & \dfrac{\partial}{\partial p_{n-21}} & \dots & \dfrac{\partial}{\partial p_{0n-1}} & \dfrac{\partial}{\partial p_{n-11}} & \dots & \dfrac{\partial}{\partial p_{0n}} \\
a & b & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c & \dots & d
\end{vmatrix}$$

* C. Russyan. Annales de l'Université de la Nouvelle Russie, 1898.

les $a, b, \ldots c \ldots d$ sont les coëfficients des $dx, dy, \ldots dp_{n-11}, \ldots dp_{0n}$ dans les équations (II). Si ces coëfficients sont

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} \cdots \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-11}} \cdots \frac{\partial u_i}{\partial p_{0n}}$$

de l'équation

$$du_i = 0 \quad i = 1 \ldots n$$

ces déterminants sont identiquement nuls. Pour les autres équations du système (II) les coëfficients $c \ldots d$ sont nuls. Dans ce cas nous transformons ces déterminants de la manière suivante: multiplions les éléments de la troisième, de la quatrième... de la $\left(\frac{n(n+1)}{2} + 2\right)$-me colonne, parmi les éléments desquelles est l'unité respectivement par $p_{10}, p_{20}, \ldots \theta, \ldots p_{1n-1}$ et ajoutons les produits aux éléments correspondants de la première colonne; puis multiplions les éléments desmêmes colonnes respectivement par $p_{01}, p_{11} \ldots p_{n-11} \ldots p_{0n}$ et ajoutons les produits aux éléments correspondants de la deuxième colonne. Alors les conditions cherchées sont

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
\frac{\bar{d}u_1}{dx} & \frac{\bar{d}u_1}{dy} & \frac{\partial y_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{10}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{01}} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\bar{d}u_n}{dx} & \frac{\bar{d}u_n}{dy} & \frac{\partial u_n}{\partial z} & \frac{\partial u_n}{\partial p_{10}} & \frac{\partial u_n}{\partial p_{01}} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial p_{0n-1}} & \frac{\partial u_n}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial p_{0n}} \\
\frac{\bar{d}}{dx} & \frac{\bar{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p_{10}} & \frac{\partial}{\partial p_{01}} & \ldots & \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}} & \frac{\partial}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial}{\partial p_{0n}} \\
a & b & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0
\end{vmatrix} = 0$$

étant

$$\frac{\bar{d}}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p_{10}\frac{\partial}{\partial z} + p_{20}\frac{\partial}{\partial p_{10}} + p_{11}\frac{\partial}{\partial p_{01}} + \cdots$$
$$\cdots + p_{1n-2}\frac{\partial}{\partial p_{0n-2}} + \theta\frac{\partial}{\partial p_{n-10}} + \cdots + p_{1n-1}\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}},$$
$$\frac{\bar{d}}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + p_{01}\frac{\partial}{\partial z} + p_{11}\frac{\partial}{\partial p_{10}} + p_{02}\frac{\partial}{\partial p_{01}} + \cdots$$
$$\cdots + p_{0n-1}\frac{\partial}{\partial p_{0n-2}} + p_{n-11}\frac{\partial}{\partial p_{n-10}} + \cdots + p_{0n}\frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}.$$

Les éléments de la dernière ligne restent invariants en vertu de cette circonstance que la proposition sur les déterminants ordinaires dont nous faisons l'usage est applicable à ces déterminants symboliques pourvu que les multiplicateurs employés soient regardés comme constants par rapport aux différentiations par les symboles de l'avant-dernière ligne.

On peut présenter ces conditions dans la forme:

$$\begin{vmatrix} \frac{\bar{d}u_1}{dx} & \frac{\bar{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial p_{0n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\bar{d}u_n}{dx} & \frac{\bar{d}u_n}{dy} & \frac{\partial u_n}{\partial p_{n-11}} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial p_{0n}} \\ \frac{\bar{d}}{dx} & \frac{\bar{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{n-11}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial p_{0n}} \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

les a, b étant les coëfficients des dx, dy dans les équations (I').

Si a, b sont les coëfficients des équations

$$\Omega^{(0)} = dz - p_{10}\,dx - p_{01}\,dy = 0, \ldots$$
$$\Omega^{(n-2)}_{n-2} = dp_{0n-2} - p_{1n-2}\,dx - p_{0n-1}\,dy = 0$$

ces conditions sont des identités. En effet, dans ce cas les a, b ne dépendent pas des $p_{n-11}, \ldots p_{0n}$ et les conditions sont

$$\left(\frac{\bar{d}b}{dx} - \frac{\bar{d}a}{dy}\right)\frac{\partial(u_1 \ldots u_n)}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{0n})} = 0.$$

Or les a, b sont

$$a = p_{10};\quad p_{20}, p_{11};\quad p_{30}, p_{21}, p_{12}; \ldots p_{n-10}, p_{n-2,1}, \ldots p_{1n-2}$$
$$b = p_{01};\quad p_{11}, p_{02};\quad p_{21}, p_{12}, p_{03}; \ldots p_{n-2,1}, p_{n-3,2}, \ldots p_{0n-1}$$

donc

$$\frac{\bar{d}b}{dx} - \frac{\bar{d}a}{dy} \equiv 0$$

ce qui prouve l'affirmation.

Il ne reste qu'à examiner le cas quand les a, b sont les coëfficients des équations

$$\Omega^{(n-1)}_0 = dp_{n-10} - \theta dx - p_{n-11}\,dy = 0, \ldots$$
$$\Omega^{(n-1)}_{n-1} = dp_{0n-1} - p_{1n-1}\,dx - p_{0n}\,dy = 0.$$

Pour le cas de l'équation $\Omega_0^{(n-1)} = 0$, la condition est

$$\begin{vmatrix} \frac{\bar{d}u_1}{dx} & \frac{\bar{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\bar{d}u_n}{dx} & \frac{\bar{d}u_n}{dy} & \frac{\partial u_n}{\partial p_{n-11}} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial p_{0n}} \\ \frac{\bar{d}}{dx} & \frac{\bar{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{n-11}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial p_{0n}} \\ \theta & p_{n-11} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} \frac{\bar{d}u_1}{dx} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-2,2}} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\bar{d}u_n}{dx} & \frac{\partial u_n}{\partial p_{n-2,2}} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial p_{0n}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\bar{d}\theta}{dy} & \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-11}} & \cdots & \frac{\partial \theta}{\partial p_{0n}} \\ \frac{\bar{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\bar{d}u_n}{dy} & \frac{\partial u_n}{\partial p_{n-11}} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial p_{0n}} \end{vmatrix} = 0$$

ou enfin

$$\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_n)}{d(xp_{n-2,2} \cdots p_{0n})} + \frac{\bar{d}(\theta, u_1 \ldots u_n)}{d(yp_{n-11} \cdots p_{0n})} = 0.$$

Pour chacune des autres équations

$$\Omega_k^{(n-1)} = 0 \quad k = 1 \ldots n-1$$

ces conditions sont

$$\begin{vmatrix} \frac{\bar{d}u_1}{dx} & \frac{\bar{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\bar{d}u_n}{dx} & \frac{\bar{d}u_n}{dy} & \frac{\partial u_n}{\partial p_{n-11}} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial p_{0n}} \\ \frac{\bar{d}}{dx} & \frac{\bar{d}}{dy} & \frac{\partial}{\partial p_{n-11}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial p_{0n}} \\ p_{n-k\,k}, & p_{n-k-1\,k+1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En désignant par (p_{n-ss}) l'ommission de la variable p_{n-ss} dans les déterminants fonctionels on les représente dans la forme

$$\begin{vmatrix} \frac{\bar{d}u_1}{dx} \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} \cdots (p_{n-k-1\,k+1}) \cdots \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\bar{d}u_n}{dx} \frac{\partial u_n}{\partial p_{n-11}} \cdots (p_{n-k-1\,k+1}) \cdots \frac{\partial u_n}{\partial p_{0n}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dy} \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} \cdots (p_{n-kk}) \cdots \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{du_n}{dy} \frac{\partial u_n}{\partial p_{n-11}} \cdots (p_{n-kk}) \cdots \frac{\partial u_n}{\partial p_{0n}} \end{vmatrix} = 0$$

ou enfin

$$\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_n)}{d(xp_{n-11} \cdots (p_{n-k-1\,k+1}) \cdots p_{0n})} + \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_n)}{d(yp_{n-11} \cdots (p_{n-kk}) \cdots p_{0n})} = 0$$
$$k = 1 \ldots n-1.$$

Toutes les conditions pour les fonctions $u_1 \ldots u_n$ sont

$$\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_n)}{d(xp_{n-2,2} \cdots p_{0n})} + \frac{\bar{d}(\theta u_1 \ldots u_n)}{d(yp_{n-11} \cdots p_{0n})} = 0,$$
$$\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_n)}{d(xp_{n-11} \cdots (p_{n-k-1\,k+1}) \cdots p_{0n})} + \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_n)}{d(yp_{n-11} \cdots (p_{n-kk}) \cdots p_{0n})} = 0 \qquad \text{(III)}$$
$$k = 1 \ldots n-1.$$

avec l'inégalité

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_n)}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{0n})} \neq 0.$$

Si ces conditions sont satisfaites le système pfaffien (II) est complètement intégrable.

Toutes les fonctions $u_1, \ldots u_n$ doivent satisfaire au système linéaire et homogène

$$\frac{\bar{d}(fu_1 \ldots u_{n-1})}{d(xp_{n-22} \cdots p_{0n})} - \frac{\bar{d}(f\theta u_1 \ldots u_{n-1})}{\bar{d}(yp_{n-11} \cdots p_{0n})} = 0,$$
$$\frac{\bar{d}(fu_1 \ldots u_{n-1})}{d(xp_{n-11} \cdots (p_{n-k-1\,k+1}) \cdots p_{0n})} + \frac{\bar{d}(fu_1 \ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11} \cdots (p_{n-kk}) \cdots p_{0n})} = 0. \qquad (\text{III}_1)$$
$$k = 1 \ldots n-1.$$

Nous avons supposé que les fonctions $u_1 \dots u_n$ soient celles, pour lesquelles les équations

$$\Omega^{(0)} = 0, \dots \ \Omega^{(n-1)}_{n-1} = 0, \quad du_1 = 0 \dots \ du_n = 0 \tag{II}$$

sont linéairement indépendantes. Mais il est aisé de voir des équations (III) sous leur forme initiale des déterminants égalés à zéro que toutes les fonctions u_i $i = 1 \dots N$ doivent satisfaire aux équations (III_1). Quant aux fonctions $u_{n+1} \dots u_N$ elles doivent être solutions indépendantes des $u_1 \dots u_n$ du système complet linéaire et homogène de deux équations corespondant au système pfaffien complètement intégrable (II). Nous trouverons ce système linéaire à l'aide de la proposition suivante. Cherchons les conditions nécéssaires et suffisantes pour que les éxpressions différentielles

$$\Omega^{(0)}, \dots \quad \Omega^{(n-1)}_{n-1}, \quad dv_1, \dots \quad dv_m \, m \leq n + 2$$

soient linéairement dépendantes, les dv_i $i = 1 \dots m$ étant les différentielles des fonctions indépendantes $v_i(xyzp_{10}\,p_{01} \dots p_{0n})$.

Il est évident que

$$dv_i = \frac{\bar{d}v_i}{dx}dx + \frac{\bar{d}v_i}{dy}dy + \frac{\partial v_i}{\partial p_{n-11}}dp_{n-11} + \cdots + \frac{\partial v_i}{\partial p_{0n}}dp_{0n} +$$
$$+ \frac{\partial v_i}{\partial z}\Omega^{(0)} + \frac{\partial v_i}{\partial p_{10}}\Omega_0^{(1)} + \frac{\partial v_i}{\partial p_{01}}\Omega_1^{(1)} + \cdots + \frac{\partial v_i}{\partial p_{0n-1}}\Omega^{(n-1)}_{n-1}, \quad i = 1 \dots m.$$

Les conditions cherchées sont, que les expressions différentielles

$$\frac{\bar{d}v_i}{dx}dx + \frac{\bar{d}v_i}{dy}dy + \frac{\partial v_i}{\partial p_{n-11}}dp_{n-11} + \cdots + \frac{\partial v_i}{\partial p_{0n}}p_{0n}, \qquad i = 1 \dots m,$$
$$\Omega^{(0)}, \dots \quad \Omega^{(n-1)}_{n-1}$$

soient linéairement dépendantes. Mais comme les expressions différentielles

$$\frac{\bar{d}v_i}{dx}dx + \frac{\bar{d}v_i}{dy}dy + \frac{\partial v_i}{\partial p_{n-11}}dp_{n-11} + \cdots + \frac{\partial v_i}{\partial p_{0n}}dp_{0n} \qquad i = 1 \dots m$$

ne contiennent pas de dz, dp_{10}, $dp_{01}, \dots dp_{0n-1}$ par rapport auxquelles les expressions $\Omega^{(0)}$, .. $\Omega^{(n-1)}_{n-1}$ sont indépendantes, les conditions cherchées sont que les expressions différentielles

$$\frac{\bar{d}v_i}{dx}dx + \frac{\bar{d}v_i}{dy}dy + \frac{\partial v_i}{\partial p_{n-11}}dp_{n-11} + \cdots + \frac{\partial v_i}{\partial p_{0n}}dp_{0n} \qquad i = 1 \dots m$$

soient linéairement dépendantes. Pour que donc les expressions différentielles

$$\Omega^{(0)}, \ldots \quad \Omega_{n-1}^{(n-1)}, \quad dv_1 \ldots \quad dv_m \quad m \leq n+2$$

soient linéairement dépendantes il faut et il suffit que soient nuls identiquement les déterminants du dégré m du tableau

$$\begin{array}{cccccc} \frac{\bar{d}v_1}{dx} & \frac{\bar{d}v_1}{dy} & \frac{\partial v_1}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial v_1}{\partial p_{0n}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\bar{d}v_m}{dx} & \frac{\bar{d}v_m}{dy} & \frac{\partial v_m}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial v_m}{\partial p_{0n}} \end{array}.$$

Revenons maintenant à notre problème. Si df est la différentielle de la fonction $u_i\,(xyzp_{10} \ldots p_{0n})$ $i = 1 \ldots N$ elle doit être la combinaison linéaire des expressions différentielles indépendantes

$$\Omega^{(0)}, \ldots \quad \Omega_{n-1}^{(n-1)}, \quad du_1 \ldots du_n.$$

En vertu de la proposition précédente la condition nécéssaire et suffisante pour cela est que soient nuls identiquement les déterminants du dégré $n+1$ du tableau

$$\begin{array}{cccccc} \frac{\bar{d}f}{dx} & \frac{\bar{d}f}{dy} & \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} \\ \frac{\bar{d}u_1}{dx} & \frac{\bar{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\bar{d}u_n}{dx} & \frac{\bar{d}u_n}{dy} & \frac{\partial u_n}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial p_{0n}} \end{array}.$$

Comme

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_n)}{\partial (p_{n-11} \ldots p_{0n})} \neq 0$$

ces conditions sont

$$\begin{vmatrix} \frac{\bar{d}f}{dx} & \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} \\ \frac{\bar{d}u_1}{dx} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\bar{d}u_n}{dx} & \frac{\partial u_n}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial p_{0n}} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\bar{d}f}{dy} & \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} \\ \frac{\bar{d}u_1}{dy} & \frac{\partial u_1}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial p_{0n}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\bar{d}u_n}{dy} & \frac{\partial u_n}{\partial p_{n-11}} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial p_{0n}} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(IV)}$$

le système linéaire complet cherché de deux équations indépendantes correspondant au système pfaffien complètement intégrable (II). Nous avons donc démontré que si $u_i = c_i \cdot i = 1 \ldots N$ est le système de N intégrales complètes du système pfaffien (I') résolubles par rapport aux z, p_{10}, $p_{01}, \ldots$ p_{0n} et si

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_n)}{\partial (p_{n-11} \ldots p_{0n})} \neq 0,$$

les fonctions $u_n, \ldots u_{n+1}, \ldots u_N$ doivent satisfaire au système linéaire (III_1) et les fonctions $u_{n+1} \ldots u_N$ doivent satisfaire au système complet de deux équations indépendantes (IV). Inversement, si les fonctions $u_1 \ldots u_{n-1}$ sont déjà connues, s'il existe la solution u_n du système linéaire (III_1) telle que

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_n)}{\partial (p_{n-11} \ldots p_{0n})} \neq 0,$$

alors le système pfaffien de N équations indépendantes (II) est complètement intégrable et le système linéaire correspondant (IV) est complet. Si donc on détermine ses $N - n$ solutions indépendantes distinctes de celles $u_1 \ldots u_n$, on a le système de N intégrales complètes $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots N$ du système pfaffien

$$\Omega^{(0)} = 0, \ldots \quad \Omega^{(n-1)}_{n-1} = 0, \quad du_1 = 0, \ldots \quad du_n = 0$$

et par conséquent de celui (I'). Comme les fonctions trouvées u_i $i = 1 \ldots N$ sont indépendantes par rapport aux z, p_{10}, $p_{01}, \ldots p_{0n}$ le système (IV) étant résoluble par rapport aux $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, ces N intégrales sont résolubles par rapport aux-mêmes variables et la fonction $z = f(x, y, c_1 \ldots c_N)$ qu'on en tire est l'intégrale complète de l'équation donnée (I). Notre problème est résolu. De plus, les fonctions $u_1 \ldots u_n$ déterminent complètement le système de fonctions $u_{m+1}, \ldots u_N$ dans ce sens que les fonctions d'un système sont les fonctions des fonctions de l'autre de sorte que ces systèmes ne sont pas distincts; il n'y a qu'un système de fonctions intégrales $u_1 \ldots u_N$ renfermant celles $u_1 \ldots u_n$. L'intégrale complète trouvée de l'équation donnée (I) de l'ordre n satisfait au système d'équations de l'ordre n

$$u_i(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n}) = c_i \qquad i = 1 \ldots n$$
$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}\right).$$

Il n'y a qu'une telle intégrale dans ce sens que ces intégrales complètes se déduisent l'une de l'autre par la simple transformation des constantes arbitraires et ne sont pas distinctes.

Donc tout se réduit à la recherche des $n - 1$ fonctions indépendantes $u_1 \ldots u_{n-1}$ après laquelle la résolution du problème n'exige que les intégrations des systèmes d'équations différentielles ordinaires. Cherchons ces fonctions. Le système d'équations linéaires et homogènes (III_1) aux $N + 2$ dérivées possédant les N solutions indépendantes $u_1, \ldots u_N$ ne doit pas contenir plus que les deux équations indépendantes. Cela donne pour les fonctions $u_1, \ldots u_{n-1}$ les conditions dans la forme des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Puis il y a à distinguer deux cas: le système (III_1) se réduit aux deux équations indépendantes, ou il se réduit à une seule équation. Dans le premier cas le système de deux équations indépendantes (III_1) aux $N + 2$ derivées ayant les N solutions indépendantes par rapport aux $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n}$ doit être résoluble par rapport aux $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, et doit constituer le système complet.

Cette dernière circonstance donne les nouvelles conditions pour les fonctions $u_1 \ldots u_{n-1}$ qui ont la forme des équations aux dérivées partielles du second ordre linéaires par rapport aux dérivées secondes de chacune des fonctions. Si les fonctions $u_1 \ldots u_{n-1}$ y satisfont et si l'on détermine telle solution u_n du système complet (III_1) que

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_n)}{\partial (p_{n-11} \ldots p_{0n})} \neq 0$$

le système linéaire (IV) est complet et résoluble par rapport aux $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$. Si $u_{n+1} \ldots u_N$ sont ses solutions indépendantes distinctes de celles $u_1 \ldots u_n$, les équations $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots N$ est le système de N intégrales complètes du système pfaffien (I') résolubles par rapport aux $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n}$ et la fonction $z = f(x, y, c_1 \ldots c_N)$ qu'on en tire est l'intégrale complète de l'équation donnée (I). On peut démontrer que dans ce cas la détermination des fonctions $u_n, \ldots u_N$ se réduit à l'intégration d'un seul système complet (III_1). En effet, les fonctions $u_1, \ldots u_N$ sont comme nous l'avons vu les solutions du système (III_1); les deux systèmes complets (III_1) et (IV) chacun de deux équations indépendantes ayant les mêmes solutions $u_1, \ldots u_N$ sont équivalents; au lieu donc de déterminer la fonction u_n du système complet (III_1) et puis celles $u_{n+1} \ldots u_N$ du système complet (IV) on peut déterminer les fonctions $u_n, \ldots u_N$ comme les solutions indépendantes distinctes des $u_1 \ldots u_{n-1}$ du système complet (III_1). Il s'ensuit qu'il n'y a dans ce cas qu'un système de fonctions intégrales $u_1 \ldots u_N$ renfermant celles $u_1 \ldots u_{n-1}$ dans ce sens que les fonctions d'un système sont les fonctions

des fonctions de l'autre système et ces systèmes ne sont pas distincts. En d'autres termes le système pfaffien (I^1) n'a dans ce cas qu'un système de N intégrales complètes $u_i = c_i$ $i = 1 \dots N$ renfermant celles $u_1 = c_1, \dots u_{n-1} = c_{n-1}$. L'intégrale complète trouvée de l'équation donnée de l'ordre n (I) satisfait aussi au système de $n - 1$ équations du même ordre

$$u_i(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots p_{0n}) = c_i \qquad i=1 \dots n-1$$
$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right).$$

Dans ce cas il n'y a qu'une telle intégrale complète dans ce sens que ces intégrales complètes se déduisent l'une de l'autre par la simple transformation des constantes arbitraires et ne sont pas distinctes.

Donc pour qu'il existe plusieurs systèmes distincts de fonctions intégrales u_1 $i = 1 \dots N$ contenant celles $u_1 \dots u_{n-1}$, ou pour qu'il existe plusieurs intégrales complètes distinctes de l'équation donnée de l'ordre n (I) qui satisfont et au système de $n - 1$ équations du même ordre

$$u_i(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots p_{0n}) = c_i \qquad i=1 \dots n-1$$
$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right)$$

il faut que le système linéaire (III_1) se réduise à une seule équation.

Examinons maintenant le second cas. Pour que le système (III_1) se réduise à une seule équation il faut et il suffit que les coëfficients des

$$\frac{\bar{d}f}{dx}, \quad \frac{\bar{d}f}{dy} \frac{\partial f}{\partial p_{n-11}}, \dots \frac{\partial f}{\partial p_{0n}}$$

dans ces équations soient proportionels. Cela donne les conditions pour les fonctions $u_1 \dots u_{n-1}$ qui ont la forme des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Cherchons-les. Soit

$$\frac{\partial (u_1 \dots u_{n-1})}{\partial (p_{n-11} \dots p_{1n-1})} \neq 0.$$

L'équation du système (III_1) pour $k = n - 1$ est

$$\frac{\bar{d}(fu_1 \dots u_{n-1})}{d(xp_{n-11} \dots p_{1n-1})} + \frac{\bar{d}(fu_1 \dots u_{n-1})}{d[yp_{n-11} \dots (p_{1n-1})p_{0n}]} = 0.$$

Son coëfficient de $\frac{\bar{d}f}{dx}$ est

$$\frac{\partial (u_1 \dots u_{n-1})}{\partial (p_{n-11} \dots p_{1n-1})} \neq 0.$$

Les conditions cherchées sont celles de la proportionalité des coëfficients des autres équations à ceux de cette équation à laquelle se réduira tout le système (III_1).

Les conditions de la proportionalité des coëfficients des

$$\frac{\overline{d}f}{dx}, \quad \frac{\overline{d}f}{dy}$$

sont

$$\text{(A)} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-2,2} \cdots p_{0n})}, & -\frac{\partial(\theta u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{0n})} \\ \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{1n-1})}, & \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial[p_{n-11} \cdots (p_{1n-1}) p_{0n}]} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial[p_{n-11} \cdots (p_{n-k-1\,k+1}) \cdots p_{0n}]}, & \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial[p_{n-11} \cdots (p_{n-kk}) \cdots p_{0n}]} \\ \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{1n-1})}, & \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial[p_{n-11} \cdots (p_{1n-1}) p_{0n}]} \end{vmatrix} = 0.$$

$$k = 1 \ldots n-2$$

Quant à la proportionalité des coëfficients des

$$\frac{\overline{d}f}{dx}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} \qquad s = 1 \ldots n$$

supposons d'abord $s < n$.

Nous écrirons pour la commodité toutes les variables p_{n-ss} dans les déterminants fonctionels en mettant entre les parenthèses celles, qui sont ommises et nous conviendrons considérer comme nuls ces déterminants où sont ommises les deux variables p_{n-ss} avec les-mêmes paires d'indices. Alors ces conditions sont: pour la première équation

$$\text{(B)} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-2,2} \cdots p_{0n})}, & \frac{\overline{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[x(p_{n-11}) p_{n-2,2} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{0n}]} + \frac{d(\theta u_1 \ldots u_{n-1})}{d[y p_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{0n}]} \\ \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{1n-1})}, & -\left[\frac{\overline{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[x p_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{1n-1}]} + \frac{\overline{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[y p_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots (p_{1n-1}) p_{0n}]}\right] \end{vmatrix} = 0.$$

Pour les autres, si $s \leq k$

$$
\text{(C)}\qquad
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial[p_{n-11} \cdots (p_{n-k-1\,k+1}) \cdots p_{0n}]}, &
\dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d\,[xp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots (p_{n-k-1\,k+1}) \cdots p_{0n}]} + \dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{[yp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots (p_{n-kk}) \cdots p_{0n}]} \\
\dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \cdots p^{1}{}_{n-1})}, &
\dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d\,[xp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{1n-1}]} + \dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d\,[yp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots (p_{1n-1})\,p_{0n}]}
\end{vmatrix} = 0,
$$

et $s > k$

$$
\text{(D)}\qquad
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial[p_{n-11} \cdots (p_{n-k-1\,k+1}) \cdots p_{0n}]}, &
\dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d\,[xp_{n-11} \cdots (p_{n-k-1\,k+1}) \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{0n}]} + \dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d\,[yp_{n-11} \cdots (p_{n-kk}) \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{0n}]} \\
\dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{1n-1})}, &
\left[\dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d\,[xp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{1n-1}]} + \dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d\,[yp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots (p_{1n-1})\,p_{0n}]}\right]
\end{vmatrix} = 0.
$$

Si enfin $s = n$ les conditions sont: pour la première équation

$$
\text{(E)}\qquad
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-2,2} \cdots p_{0n})}, &
\dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d\,[xp_{n-2,2} \cdots p_{1n-1}]} + \dfrac{\bar{d}(\theta u_1 \ldots u_{n-1})}{d\,(yp_{n-11} \cdots p_{1n-1})} \\
\dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{1n-1})}, &
\dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d\,(yp_{n-11} \cdots p_{2n-2})}
\end{vmatrix} = 0,
$$

et pour les autres

$$
\text{(F)}\qquad
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial[p_{n-11} \cdots (p_{n-k-1\,k+1}) \cdots p_{0n}]}, &
\dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d\,[xp_{n-11} \cdots (p_{n-k-1\,k+1}) \cdots p_{1n-1}]} + \dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d\,[yp_{n-11} \cdots (p_{n-kk}) \cdots p_{1n-1}]} \\
\dfrac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{1n-1})}, &
\dfrac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d\,(yp_{n-11} \cdots p_{2n-2})}
\end{vmatrix} = 0 \qquad k = 1 \ldots n-2.
$$

Considérons les conditions (A). Soit

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial[p_{n-11} \ldots (p_{1n-1}) p_{0n}]} = \lambda \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{1n-1})}. \qquad (\alpha)$$

Alors les conditions (A) sont

$$\frac{\partial(\theta u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{0n})} = \lambda \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-2,2} \ldots p_{0n})} = 0,$$

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial[p_{n-11} \ldots (p_{n-kk}) \ldots p_{0n}]} = \lambda \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial[p_{n-11} \ldots (p_{n-k-1\,k+1}) \ldots p_{0n}]} \qquad k = n-2, \ldots 1.$$

En transformant chacune des deuxièmes conditions (A) à l'aide de l'équation (α) et de la précédente on les a dans la forme

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial[p_{n-11} \ldots (p_{n-kk}) \ldots p_{0n}]} = \lambda^{n-k} \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{1n-1})} \qquad k = 1 \ldots n-2.$$

La première condition (A) obtient en vertu des deuxièmes la forme

$$\lambda^n + \lambda^{n-1} \frac{\partial\theta}{\partial p_{n-11}} - \lambda^{n-2} \frac{\partial\theta}{\partial p_{n-22}} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{\partial\theta}{\partial p_{0n}} = 0.$$

La quantité donc λ doit être la racine de l'équation algébrique du n-me dégré

$$\xi^n + \xi^{n-1} \frac{\partial\theta}{\partial p_{n-11}} - \xi^{n-2} \frac{\partial\theta}{\partial p_{n-22}} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{\partial\theta}{\partial p_{0n}} = 0 \qquad \text{(a)}$$

dont les racines nous désignerons par $\lambda_1 \ldots \lambda_n$. Soit $\lambda = \lambda_n$. Alors toutes les $n-1$ conditions (A) sont

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial[p_{n-11} \ldots (p_{n-kk}) \ldots p_{0n}]} = \lambda_n^{n-k} \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{1n-1})}. \qquad k = 1 \ldots n-1.$$

On les peut présenter dans la forme plus commode. Il en suit que

$$\frac{\partial(u_i u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{0n})} \equiv 0 = \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{1n-1})} \sum_1^n s(-1)^{s-1} \lambda_n^{n-s} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-ss}}. \qquad i = 1 \ldots n-1$$

ou

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \lambda_n^{n-1} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-11}} - \lambda_n^{n-2} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-22}} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{\partial u_i}{\partial p_{0n}} = 0 \qquad i = 1 \ldots n-1.$$

Inversement on obtient des conditions (A_1) celles (A) après la substitution au lieu des

$$\frac{\partial u_i}{\partial p_{0n}} \qquad i = 1 \ldots n-1$$

dans les déterminants

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial [p_{n-11} \ldots (p_{n-kk}) \ldots p_{0n}]} \qquad k = 1 \ldots n-1$$

de leurs valeurs d'après les relations (A_1). Les conditions donc (A_1) et (A) sont équivalentes. Nous employons les conditions (A_1).

Quant aux conditions (B), (C), (D), (E), (F) elles obtiennent en vertu de celles (A_1) la forme

$$\text{(B)} \quad \begin{aligned} &\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[x(p_{n-11}) p_{n-22} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{0n}]} + \frac{\bar{d}(\theta u_1 \ldots u_{n-1})}{d[y p_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{0n}]} + \\ &+ \lambda_n^{n-1}\left[\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[x p_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1}]} + \right. \\ &\left. + \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[y p_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots (p_{1n-1}) p_{0n}]}\right] = 0, \end{aligned}$$

$$\text{(C)} \quad \begin{aligned} &\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[x p_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots (p_{n-k-1\,k+1}) \ldots p_{0n}]} + \\ &+ \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[y p_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots (p_{n-kk}) \ldots p_{0n}]} - \\ &- \lambda_n^{n-k-1}\left[\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[x p_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1}]} + \right. \\ &\left. + \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[y p_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots (p_{1n-1}) p_{0n}]}\right] = 0 \; (s \leq k), \end{aligned}$$

$$\text{(D)} \quad \begin{aligned} &\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[x p_{n-11} \ldots (p_{n-k-1\,k+1}) \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{0n}]} + \\ &+ \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[y p_{n-11} \ldots (p_{n-kk}) \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{0n}]} + \\ &+ \lambda_n^{n-k-1}\left[\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[x p_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1}]} + \right. \\ &\left. + \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[y p_{n-11} \ldots (p_{n-ss} \ldots (p_{1n-1}) p_{0n}]}\right] = 0 \; (s > k), \qquad s = 1 \ldots n-1 \end{aligned}$$

$$\text{(E)}\quad \frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-1})}{d(xp_{n-2,2}\ldots p_{1n-1})}+\frac{\bar d(\theta u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{1n-1})}-\lambda_n^{n-1}\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{2n-2})}=0,$$

$$\text{(F)}\quad \frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-1})}{d(xp_{n-11}\ldots(p_{n-k-1\,k+1})\ldots p_{1n-1})}+\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots(p_{n-kk})\ldots p_{1n-1})}-\lambda_n^{n-k-1}\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{2n-2})}=0 \qquad k=1\ldots n-2.$$

On peut démontrer que les conditions (B), (C), (D) sont les conséquences de celles (E), (F). Nous le démontrerons à l'aide des deux formules auxiliaires:

$$\frac{\bar d(\theta u_1\ldots u_{n-1})}{d[yp_{n-11}\ldots(p_{n-ss})\ldots p_{0n}]}=\lambda_n^{n-s}\frac{\bar d(\theta u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{1n-1})}-\lambda_n^{n}\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-1})}{d[yp_{n-11}\ldots(p_{n-ss})\ldots p_{1n-1}]},$$

$$\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-1})}{d[xp_{n-11}\ldots(p_{n-ss})\ldots(p_{n-tt})\ldots p_{0n}]}= \tag{b}$$

$$=-\lambda_n^{n-s}\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-1})}{d[xp_{n-11}\ldots(p_{n-t})\ldots p_{1n-1}]}+\lambda_n^{n-t}\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-1})}{d[xp_{n-11},\ldots(p_{n-ss})\ldots p_{1n-1}]}$$

$$s\leq t<n.$$

On les démontre aisement en substituant dans les premières parties au lieu des $\frac{\partial\theta}{\partial p_{0n}}$, $\frac{\partial u_i}{\partial p_{0n}}$ $i=1\ldots n-1$ leurs expressions d'après les relations

$$\lambda_n^{n}+\lambda_n^{n-1}\frac{\partial\theta}{\partial p_{n-11}}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\partial\theta}{\partial p_{0n}}=0,$$

$$\lambda_n^{n-1}\frac{\partial u_i}{\partial p_{n-11}}-\lambda_n^{n-2}\frac{\partial u_i}{\partial p_{n-22}}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\partial u_i}{\partial p_{0n}}=0 \qquad i=1\ldots n-1.$$

La dernière formule reste vraie en changeant x en y. Les conditions (B), (C), (D) obtiennent en vertu de ces formules la forme

$$\text{(B)}\quad \lambda_n^{n-s}\left[\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-1})}{d(xp_{n-22}\ldots p_{1n-1})}+\frac{d(\theta u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{1n-1})}-\lambda_n^{n-1}\frac{\bar d(u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{2n-2})}\right]=0,$$

$$\text{(C)}\quad \lambda_n^{n-s}\left[\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d[xp_{n-11}\ldots(p_{n-k-1\,k+1})\ldots p_{1n-1}]}+\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d[yp_{n-11}\ldots(p_{n-kk})\ldots p_{1n-1}]}-\lambda_n^{n-k-1}\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{2n-2})}\right]=0$$

$$\text{(D)}\quad \lambda_n^{n-s}\left[\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d[xp_{n-11}\ldots(p_{n-k-1\,k+1})\ldots p_{1n-1}]}+\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d[yp_{n-11}\ldots(p_{n-kk})\ldots p_{1n-1}]}-\lambda_n^{n-k-1}\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{2n-2})}\right]=0\qquad k=1\ldots n-2$$

et sont évidemment conséquence de celles (E), (F). Les fonctions donc $u_1\ldots u_{n-1}$ doivent satisfaire aux n conditions

$$\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d(xp_{n-22}\ldots p_{1n-1})}+\frac{\bar{d}(\theta u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{1n-1})}-\lambda_n^{n-1}\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{2n-2})}=0,$$

$$\text{(V)}\quad \frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d[xp_{n-11}\ldots(p_{n-k-1\,k+1})\ldots p_{1n-1}]}+\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d[yp_{n-11}\ldots(p_{n-kk})\ldots p_{1n-1}]}-\lambda_n^{n-k-1}\frac{\bar{d}(u_1\ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11}\ldots p_{2n-2})}=0\qquad k=1\ldots n-2$$

$$\lambda_n^{n-1}\frac{\partial u_i}{\partial p_{n-11}}+\lambda_n^{n-2}\frac{\partial u_i}{\partial p_{n-22}}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\partial u_i}{\partial p_{0n}}=0\qquad i=1\ldots n-1.$$

avec l'inégalité

$$\frac{\partial(u_1\ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11}\ldots p_{1n-1})}\neq 0.$$

Si les fonctions $u_1\ldots u_{n-1}$ y satisfont le système (III_1) se réduit à une seule équation

$$\text{(VI)}\quad \frac{\bar{d}(fu_1\ldots u_{n-1})}{d(xp_{n-11}\ldots p_{1n-1})}+\frac{\bar{d}(fu_1\ldots u_{n-1})}{d[yp_{n-11}\ldots(p_{1n-1})p_{0n}]}=0.$$

Le procédé pour déterminer dans ce cas l'intégrale complète est tel: si les fonctions $u_1\ldots u_{n-1}$ sont connues, on détermine la solution u_n de l'équation linéaire homogène (VI) telle, que

$$\frac{\partial(u_1\ldots u_n)}{\partial(p_{n-11}\ldots p_{0n})}\neq 0$$

ce qui est possible d'une infinité de manières; puis on détermine les solutions indépendantes $u_{n-11} \ldots u_N$ distinctes de celles $u_1 \ldots u_n$ du système complet

$$\frac{\bar{d}(fu_1 \ldots u_n)}{d(xp_{n-11} \cdots p_{0n})} = 0, \quad \frac{\bar{d}(fu_1 \ldots u_n)}{d(yp_{n-11} \cdots p_{0n})} = 0. \qquad \text{(IV)}$$

Les équations $u_i = c_i \; i = 1 \ldots N$ est le système d'intégrales complètes du système pfaffien (I') résolubles par rapport aux z, p_{10}, p_{01}, $\ldots p_{0n}$ et la fonction $z = f(x, y, c_1 \ldots c_N)$ qu'on en tire est l'intégrale complète de l'équation donnée (I). Elle satisfait au système de $n - 1$ équations aux dérivées partielles de l'ordre n

$$u_i(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n}) = c_i \qquad i = 1 \ldots n-1$$
$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}\right).$$

Mais dans ce cas il y a plusieurs intégrales complètes distinctes de l'équation donnée (I) de cette propriété. En effet, les fonctions $u_{n+1} \ldots u_N$ sont aussi les solutions de l'équation linéaire (VI). Soit v_n sa dernière $N + 1$-me solution indépendante de celles $u_1 \ldots u_N$ et telle que

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1} v_n)}{\partial(p_{n-11} \cdots p_{0n})} \neq 0$$

ce qui est possible d'une infinité de manières.

Si l'on prend la solution v_n au lieu de u_n on détermine comme il a été indiqué un autre système d'intégrales complètes du système pfaffien (I')

$$u_1 = c_1 \ldots u_{n-1} = c_{n-1}, \quad v_n = \Gamma_n, \ldots v_N = \Gamma_N$$

résolubles par rapport aux z, p_{10}, p_{01}, $\ldots p_{0n}$, mais le système de fonctions intégrales $u_1 \ldots u_{n-1}$, v_n, $\ldots v_N$ est distinct de celui de fonctions intégrales $u_1 \ldots u_{n-1}$, $u_n \ldots u_N$ car la fonction v_n est indépendante de celles $u_1 \ldots u_N$. La fonction $z = \Psi(xy c_1 \ldots c_{n-1} \Gamma_n, \ldots \Gamma_N)$ qu'on en tire sera de-même l'intégrale complète de l'équation donnée (I) qui satisfait au système.

$$u_i(x, y, z, p_{10} p_{01} \cdots p_{0n}) = c_i \qquad i = 1 \ldots n-1$$
$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}\right)$$

mais elle est distincte de la précédente.

Dans ce cas il y a plusieurs intégrales complètes distinctes de l'équation donnée (I) qui satisfont au système de n équations de l'ordre n

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots p_{0n}),$$
$$u_i(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots p_{0n}) = c_i \qquad i = 1 \dots n-1$$
$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}\right).$$

Nous dirons que ces équations sont en involution.

On peut dire que dans ce cas les fonctions $u_1 \dots u_{n-1}$ déterminent la fonction suivante u_n de la manière multiforme car il y a plusieurs fonctions u_n qui figurent avec les fonctions $u_1 \dots u_{n-1}$ dans plusieurs systèmes distincts de fonctions intégrales $u_1 \dots u_N$.

§ **2.** Nous avons vu que pour déterminer l'intégrale complète de l'équation donnée de l'ordre n qui satisfait au système en involution de n équations

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots p_{0n}),$$
$$u_s(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots p_{0n}) = c_s \qquad s = 1 \dots n-1$$
$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}\right)$$

on doit déterminer la solution u_n de l'équation linéaire

$$\frac{\bar{d}(fu_1 \dots u_{n-1})}{d(xp_{n-11} \dots p_{1n-1})} + \frac{\bar{d}(fu_1 \dots u_{n-1})}{d[yp_{n-11} \dots (p_{1n-1})p_{0n}]} = 0 \tag{VI}$$

et puis les $N - n$ solutions restantes $u_{n+1} \dots u_N$ du système complet (IV). La fonction $z = f(xyc_1 \dots c_N)$ qu'on tire des équations $u_i = c_i$ $i = 1 \dots N$ est l'intégrale cherchée. Comme les fonctions $u_{n+1} \dots u_N$ sont aussi les solutions de l'équation linéaire (VI) on en voit, que pour déterminer cette intégrale complète, on doit chercher le système special de $N + 1 - n$ solutions de cette équation. On peut démontrer que la connaissance de toutes ses $N + 1$ solutions permet de déterminer toutes les intégrales de ce système en involution, ou, en d'autres termes, la connaissance de l'intégrale générale du système correspondant de $N + 1$ équations différentielles ordinaires permet de trouver toutes les intégrales du système en involution. Pour ce but nous transformerons un peu l'équation linéaire (VI). En développant les determinants et en ayant égard à la relation

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_{n-1})}{\partial[p_{n-11} \dots (p_{1n-1})p_{0n}]} = \lambda_n \frac{\partial(u_1 \dots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \dots p_{1n-1})}$$

nous l'avons dans la forme

$$\left(\frac{\bar{d}f}{dx} + \lambda_n \frac{\bar{d}f}{dy}\right) \frac{\partial(u_1 \dots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \dots p_{1n-1})} +$$

$$+ \sum_1^{n-2} s(-1)^s \frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} \left[\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d[xp_{n-11} \dots (p_{n-ss}) \dots p_{1n-1}]} + \right.$$

$$\left. + \frac{d(u_1 \dots u_{n-1})}{d[yp_{n-11} \dots (p_{n-ss}) \dots (p_{1n-1}) p_{0n}]} \right] +$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d[xp_{n-11} \dots p_{2n-2}]} + (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d(yp_{n-11} \dots p_{2n-2})} = 0.$$

Or d'après les relations (b)

$$\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d[yp_{n-11} \dots (p_{n-ss}) \dots (p_{1n-1}) p_{0n}]} = -\lambda_n^{n-s} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d[yp_{n-11} \dots p_{2n-2}]} +$$

$$+ \lambda_n \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d[yp_{n-11} \dots (p_{n-ss}) \dots p_{1n-1}]}.$$

Cette équation est

$$\left(\frac{\bar{d}f}{dx} + \lambda_n \frac{\bar{d}f}{dy}\right) \frac{\partial(u_1 \dots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \dots p_{1n-1})} +$$

$$+ \sum_1^{n-2} s(-1)^s \frac{\partial f}{\partial p_{n-ss}} \left(\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d[xp_{n-11} \dots (p_{n-ss}) \dots p_{1n-1}]} - \right.$$

$$\left. - \lambda_n^{n-s} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d(yp_{n-11} \dots p_{2n-2})} + \lambda_n \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d[yp_{n-11} \dots (p_{n-ss}) \dots p_{1n-1}]} \right) +$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{1n-1}} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d[xp_{n-11} \dots p_{2n-2}]} + (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{0n}} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d(yp_{n-11} \dots p_{2n-2})} = 0.$$

Le système correspondant de $N+1$ équations différentielles ordinaires est

$$\Delta = \frac{\partial(u_1 \dots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \dots p_{1n-1})} \neq 0$$

$$dy = \lambda_n dx, \quad dz = (p_{10} + \lambda_n p_{01}) dx, \quad dp_{10} = (p_{20} + \lambda_n p_{11}) dx,$$

$$dp_{01} = (p_{11} + \lambda_n p_{02}) dx \dots dp_{0n-1} = (p_{1n-1} + \lambda_n p_{0n}) dx,$$

(VII)
$$\Delta dp_{n-ss} = (-1)^s \left[\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d[xp_{n-11} \dots (p_{n-ss}) \dots p_{1n-1}]} - \lambda_n^{n-s} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d[yp_{n-11} \dots p_{2n-2}]} + \lambda_n \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d[yp_{n-11} \dots (p_{n-ss}) \dots p_{1n-1}]} \right] dx \qquad s = 1 \dots n-2,$$

$$\Delta dp_{1n-1} = (-1)^{n-1} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d[xp_{n-11} \dots p_{2n-2}]} dx,$$

$$\Delta dp_{0n} = (-1)^{n-1} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d[yp_{n-11} \dots p_{2n-2}]} dx.$$

Soit l'intégrale générale de ce système principale relativement du $x = x_0$

$$y = y(xx_0 \ldots p^0_{0n}), \quad z = z(xx_0 \ldots p^0_{0n}) \ldots p_{0n} = p_{0n}(xx_0 \ldots p^0_{0n}).$$

Considérons les formules de la transformation des variables

$$x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n}$$

$$x = x_0 + d - d_0, \quad y = y(xx_0 \ldots p^0_{0n}), \ldots p_{0n} = p_{0n}(xx_0 \ldots p^0_{0n})$$

où les $x_0, y_0, \ldots p^0_{0n}$ sont les nouvelles variables et d est le paramètre. Comme les équations

$$u_i(x, y, z, p_{10} \ldots p_{0n}) = c_i \qquad i = 1 \ldots n-1$$

sont les intégrales du système d'équations différentielles (VII) on a qu'en vertu de ces formules

$$u_i(xyz \ldots p_{0n}) = u_i(x_0 y_0 z_0 \ldots p^0_{0n}) \qquad i = 1 \ldots n-1$$

Si donc les variables $x, y, z, \ldots p_{0n}$ sont liées par les relations

$$u_i(xyz \ldots p_{0n}) = c_i \qquad i = 1 \ldots n-1$$

les nouvelles variables $x_0, y_0, z_0, \ldots p^0_{0n}$ sont liées par celles

$$u_i(x_0 y_0 z_0 \ldots p^0_{0n}) = c_i \qquad i = 1 \ldots n-1.$$

Transformons par ces formules les premières parties du système pfaffien (I')

$$\Omega^{(0)} = 0, \ldots \Omega^{(n-1)}_{n-1} = 0$$

oú les variables $x, y, z, \ldots p_{0n}$ sont liées par les relations

$$u_i(x, y, z, \ldots p_{0n}) = c_i, \qquad i = 1 \ldots n-1.$$

Les variables $x_0, y_0, z_0, \ldots p^0_{0n}$ des expressions transformées sont liées par les relations

$$u_i(x_0, y_0, z_0, \ldots p^0_{0n}) = c_i \qquad i = 1 \ldots n-1$$

et les coëfficients des $dx_0, dy_0, \ldots dp^0_{0n}$ contiennent le paramètre d. Cherchons la forme du système transformé. Trouvons pour ce but les dérivées

$$\frac{\partial \Omega^{(0)}}{\partial \alpha}, \ldots \frac{\partial \Omega^{(n-1)}_{n-1}}{\partial \alpha}.$$

On a que

$$\frac{\partial\Omega^{(0)}}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}(dz-p_{10}\,dx-p_{01}\,dy)=d\frac{\partial z}{\partial\alpha}-\frac{\partial p_{10}}{\partial\alpha}dx-p_{10}\,d\frac{\partial x}{\partial\alpha}-$$
$$-\frac{\partial p_{01}}{\partial\alpha}dy-p_{01}\,d\frac{\partial y}{\partial\alpha}$$

ou comme $\frac{\partial x}{\partial\alpha}=1$

$$\frac{\partial\Omega^{(0)}}{\partial\alpha}=d\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial p_{10}}{\partial x}dx-\frac{\partial p_{01}}{\partial x}dy-p_{01}\,d\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Ou en vertu des équations (VII)

$$\frac{\partial\Omega^{(0)}}{\partial\alpha}=d(p_{10}+\lambda_n p_{01})-(p_{20}+\lambda_n p_{11})\,dx-(p_{11}+\lambda_n p_{02})\,dy-p_{01}\,d\lambda_n$$

ou enfin

$$\frac{\partial\Omega^{(0)}}{\partial\alpha}=dp_{10}-p_{20}dx-p_{11}dy+\lambda_n(dp_{01}-p_{11}dx-p_{02}\,dy)=\Omega_0^{(1)}+\lambda_n\Omega_1^{(1)}.$$

Evaluons en général

$$\frac{\partial\Omega_k^{(i)}}{\partial\alpha}$$

où

$$i<n-1,\quad k=0,\ldots i.$$

On a que

$$\frac{\partial\Omega_k^{(i)}}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}(dp_{i-kk}-p_{i-k+1k}\,dx-p_{i-kk+1}\,dy),$$

ou comme $\frac{\partial x}{\partial\alpha}=1$

$$\frac{\partial\Omega_k^{(i)}}{\partial\alpha}=d\frac{\partial p_{i-kk}}{\partial x}-\frac{\partial p_{i-k+1k}}{\partial x}dx-\frac{\partial p_{i-kk+1}}{\partial x}dy-p_{i-kk+1}\,d\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Ou en vertu des équations (VII)

$$\frac{\partial\Omega_k^{(i)}}{\partial\alpha}=dp_{i-k+1k}-p_{i-k+2k}\,dx-p_{i-k+1k+1}\,dy+$$
$$+\lambda_n(dp_{i-kk+1}-p_{i-k+1k+1}\,dx-p_{i-kk+2}\,dy)=\Omega_k^{(i+1)}+\lambda_n\Omega_{k+1}^{(i+1)}.$$
$$i<n-1,\quad k=0,\quad 1\ldots i$$

Cherchons maintenant

$$\frac{\partial\Omega_0^{(n-1)}}{\partial\alpha}.$$

On a que

$$\frac{\partial \Omega_0^{(n-1)}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(dp_{n-10} - \theta dx - p_{n-11}\,dy)$$

ou comme $\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = 1$

$$\frac{\partial \Omega_0^{(n-1)}}{\partial \alpha} = d\frac{\partial p_{n-10}}{\partial x} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial \theta}{\partial p_{0n-1}}\frac{\partial p_{0n-1}}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-11}}\frac{\partial p_{n-11}}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial \theta}{\partial p_{0n}}\frac{\partial p_{0n}}{\partial x}\right) dx - \frac{\partial p_{n-11}}{\partial x}\,dy - p_{n-11}\,d\frac{\partial y}{\partial x}.$$

En vertu des équations (VII) on a que

$$\frac{\partial \Omega_0^{(n-1)}}{\partial \alpha} = d(\theta + \lambda_n p_{n-11}) - \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} + \lambda_n \frac{\partial \theta}{\partial y} + (p_{10} + \lambda_n p_{01})\frac{\partial \theta}{\partial z} + \right.$$
$$\left. + \cdots + (p_{1n-1} + \lambda_n p_{0n})\frac{\partial \theta}{\partial p_{0n-1}}\right] dx - K dx - L dy - p_{n-11}\,d\lambda_n$$

étant

$$\Delta L = -\left(\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d(xp_{n-22} \cdots p_{1n-1})} - \lambda_n^{n-1}\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11} \cdots p_{2n-2})} + \right.$$
$$\left. + \lambda_n \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-22} \cdots p_{1n-1})}\right),$$

$$\Delta K = \sum_1^{n-2} s(-1)^s \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-ss}}\left(\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[xp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{1n-1}]} - \right.$$
$$\left. - \lambda_n^{n-s}\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11} \cdots p_{2n-2})} - \lambda_n \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{1n-1}]}\right) +$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{\partial \theta}{\partial p_{1n-1}}\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d(xp_{n-11} \cdots p_{2n-2})} + (-1)^{n-1}\frac{\partial \theta}{\partial p_{0n}}\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11} \cdots p_{2n-2})}.$$

On peut écrire que

$$\Delta K = \sum_1^{n-1} s(-1)^s \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-ss}}\left[\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[xp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{1n-1}]} + \right.$$
$$\left. + \lambda_n \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[yp_{n-11} \cdots (p_{n-ss}) \cdots p_{1n-1}]}\right] +$$
$$+ \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11} \cdots p_{2n-2})}\sum_1^{n} s(-1)^{s-1}\lambda_n^{n-s}\frac{\partial \theta}{\partial p_{n-ss}}.$$

Or

$$\sum_1^{n} s(-1)^{s-1}\lambda_n^{n-s}\frac{\partial \theta}{\partial p_{n-ss}} = -\lambda_n^{n}.$$

On a donc enfin que

$$\Delta K = \sum_1^{n-1} s(-1)^s \frac{\partial\theta}{\partial p_{n-ss}}\left[\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[xp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1}]} + \right.$$

$$\left. + \lambda_n \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1}]}\right] - \lambda_n{}^n \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d(yp_{n-11} \ldots p_{2n-2})}.$$

En introduisant les symboles

$$\frac{\bar{d}}{dx}, \quad \frac{\bar{d}}{dy}$$

on peut écrire que

$$\frac{\partial \Omega_0{}^{(n-1)}}{\partial \alpha} = d\theta - \frac{\bar{d}\theta}{dx}dx - \lambda_n \frac{\bar{d}\theta}{dy}dx - Kdx - Ldy + \lambda_n dp_{n-11}.$$

Or

$$d\theta = \frac{\bar{d}\theta}{dx}dx + \frac{\bar{d}\theta}{dy}dy + \frac{\partial\theta}{\partial z}\Omega^{(0)} + \cdots + \frac{\partial\theta}{\partial p_{0n-1}}\Omega_{n-1}^{(n-1)} +$$

$$+ \frac{\partial\theta}{\partial p_{n-11}}dp_{n-11} + \cdots + \frac{\partial\theta}{\partial p_{0n}}dp_{0n}.$$

Donc

$$\frac{\partial \Omega_0{}^{(n-1)}}{\partial \alpha} = \frac{\bar{d}\theta}{dy}(dy - \lambda_n dx) + \frac{\partial\theta}{\partial z}\Omega^{(0)} + \cdots + \frac{\partial\theta}{\partial p_{0n-1}}\Omega_0{}^{(n-1)} +$$

$$+ \left(\frac{\partial\theta}{\partial p_{n-11}} + \lambda_n\right)dp_{n-11} + \frac{\partial\theta}{\partial p_{n-22}}dp_{n-22} + \cdots + \frac{\partial\theta}{\partial p_{0n}}dp_{0n} -$$

$$- Kdx - Ldy.$$

Introduisons maintenant cette circonstance que les variables x, y, z, p_{10}, $p_{01} \ldots p_{0n}$ sont liées par les relations $u_i = c_i$ $i = 1 \ldots n-1$.

Ona donc que $du_i = 0$ $i=1 \ldots n-1$ ou que

$$\frac{\bar{d}u_i}{dx}dx + \frac{\bar{d}u_i}{dy}dy + \frac{\partial u_i}{\partial z}\Omega^{(0)} + \cdots + \frac{\partial u_i}{\partial p_{0n-1}}\Omega_{n-1}^{(n-1)} +$$

$$+ \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-11}}dp_{n-11} + \cdots + \frac{\partial u_i}{\partial p_{0n}}dp_{0n} = 0 \qquad i=1 \ldots n-1.$$

Comme

$$\Delta = \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{1n-1})} \neq 0$$

en vertu des relations $u_i = c_i \quad i = 1 \ldots n-1$ on a de ces relations que étant $s = 1 \ldots n-1$

$$\Delta dp_{n-ss} = (-1)^s \Bigg[\frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial [zp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1}]} \Omega^{(0)} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial [p_{0n-1} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1}]} \Omega^{(n-1)}_{n-1} \Bigg] +$$
$$+ (-1)^s \frac{\bar{d} (u_1 \ldots u_{n-1})}{\bar{d} [xp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1}]} dx +$$
$$+ (-1)^s \frac{\bar{d} (u_1 \ldots u_{n-1})}{\bar{d} [yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1}]} dy +$$
$$+ (-1)^{n-s} \frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial [p_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1} p_{0n}]} dp_{0n}.$$

ou en vertu de la relation

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial [p_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1} p_{0n}]} = \lambda_n^{n-s} \Delta$$

que

$$\Delta dp_{n-ss} = (-1)^s \Bigg[\frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial [zp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1}]} \Omega^{(0)} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial [p_{0n-1} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1}]} \Omega^{(n-1)}_{n-1} \Bigg] +$$
$$+ (-1)^s \frac{\bar{d} (u_1 \ldots u_{n-1})}{\bar{d} [xp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1}]} dx + \qquad \text{(VIII)}$$
$$+ (-1)^s \frac{\bar{d} (u_1 \ldots u_{n-1})}{\bar{d} [yp_{n-11} \ldots (p_{n-ss}) \ldots p_{1n-1}]} dy +$$
$$+ (-1)^{n-s} \lambda_n^{n-s} \Delta dp_{0n}. \qquad s = 1 \ldots n-1$$

En substituant au lieu des K, L, dp_{n-ss} $s = 1 \ldots n-1$ leurs valeurs on obtient que

$$\Delta \frac{\partial \Omega_0^{(n-1)}}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial (\theta u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial (zp_{n-11} \ldots p_{1n-1})} - \lambda_n \frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial (zp_{n-22} \ldots p_{1n-1})} \right) \Omega^{(0)} + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{\partial (\theta u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial (p_{0n-1} p_{n-11} \ldots p_{1n-1})} - \lambda_n \frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial (p_{0n-1} p_{n-22} \ldots p_{1n-1})} \right) \Omega^{(n-1)}_{n-1} +$$
$$+ (dy - \lambda_n dx) \left(\frac{\bar{d} (u_1 \ldots u_{n-1})}{\bar{d} (xp_{n-22} \ldots p_{1n-1})} + \frac{\bar{d} (\theta u_1 \ldots u_{n-1})}{\bar{d} (yp_{n-11} \ldots p_{1n-1})} -\right.$$
$$\left. - \lambda_n^{n-1} \frac{\bar{d} (u_1 \ldots u_{n-1})}{\bar{d} (yp_{n-11} \ldots p_{2n-2})} \right) + (-1)^{n-1} \Delta \left(\lambda_n^n + \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-11}} \lambda_n^{n-1} - \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^{n-1} \frac{\partial \theta}{\partial p_{0n}} \right) dp_{0n}.$$

Or en vertu de la première équation (V) et de l'équation (a) les deux derniers termes sont nuls, et on a que

$$\Delta \frac{\partial \Omega_0^{(n-1)}}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial(\theta u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(z p_{n-11} \ldots p_{1n-1})} - \lambda_n \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(z p_{n-22} \ldots p_{1n-1})} \right) \Omega^{(0)} + \cdots$$

$$\cdots + \left(\frac{\partial(\theta u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{0n-1} p_{n-11} \ldots p_{1n-1})} - \lambda_n \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{0n-1} p_{n-2,2} \ldots p_{1n-1})} \right) \Omega_{n-1}^{(n-1)}.$$

Cherchons enfin

$$\frac{\partial \Omega_k^{(n-1)}}{\partial \alpha} \qquad k = 1 \ldots n-1.$$

Soit d'abord $k < n-1$. On á que

$$\frac{\partial \Omega_k^{(n-1)}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(dp_{n-1kk} - p_{n-kk}\, dx - p_{n-1-k\,k+1}\, dy) =$$

$$= d\frac{\partial p_{n-1-kk}}{\partial x} - \frac{\partial p_{n-kk}}{\partial x} dx - \frac{\partial p_{n-1k\,k+1}}{\partial x} dy - p_{n-1-k\,k+1}\, d\frac{\partial y}{\partial x}$$

ou en vertu des équations (VII)

$$\frac{\partial \Omega_k^{(n-1)}}{\partial \alpha} = dp_{n-kk} + \lambda_n\, dp_{n-1-k\,k+1} - \frac{\partial p_{n-kk}}{\partial x} dx - \frac{\partial p_{n-1-k\,k+1}}{\partial x} dy.$$

En substituant au lieu des

$$\frac{\partial p_{n-kk}}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_{n-1-k\,k+1}}{\partial x}$$

leurs valeurs des équations (VII) et au lieu des dp_{n-kk}, $dp_{n-1-k\,k+1}$ leurs valeurs (VIII), nous aurons

$$\frac{\partial \Omega_k^{(n-1)}}{\partial \alpha} = (-1)^k \left(\frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial[z p_{n-11} \ldots (p_{n-kk}) \ldots p_{1n-1}]} - \right.$$

$$\left. - \lambda_n \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial[z p_{n-11} \ldots (p_{n-k-1\,k+1}) \ldots p_{1n-1}]} \right) \Omega^{(0)} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^k \left(\frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial[p_{0n-1} p_{n-11} \ldots (p_{n-kk}) \ldots p_{1n-1}]} - \right.$$

$$\left. - \lambda_n \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial[p_{0n-1} p_{n-11} \ldots (p_{n-k-1\,k+1}) \ldots p_{1n-1}]} \right) \Omega_{n-1}^{(n-1)} +$$

$$+ (-1)^k (dy - \lambda_n\, dx) \left(\frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[x p_{n-11} \ldots (p_{n-k-1\,k+1}) \ldots p_{1n-1}]} + \right.$$

$$+ \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d[y p_{n-11} \ldots (p_{n-kk}) \ldots p_{1n-1}]} -$$

$$\left. - \lambda_n^{n-k-1} \frac{\bar{d}(u_1 \ldots u_{n-1})}{d(y p_{n-11} \ldots p_{2n-2})} \right). \qquad k = 1 \ldots n-2$$

Mais en vertu des équations (V) le dernier terme est nul, donc

$$\Delta \frac{\partial \Omega_k^{(n-1)}}{\partial \alpha} = (-1)^k \left(\frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial [z p_{n-11} \ldots (p_{n-kk}) \ldots p_{1n-1}]} - \right.$$
$$\left. - \lambda_n \frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial [z p_{n-11} \ldots (p_{n-k-1k+1}) \ldots p_{1n-1}]} \right) \Omega^{(0)} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k \left(\frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial [p_{0n-1} p_{n-11} \ldots (p_{n-kk}) \ldots p_{1n-1}]} - \right.$$
$$\left. - \lambda_n \frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial [p_{0n-1} p_{n-11} \ldots (p_{n-k-1k+1}) \ldots p_{1n-1}]} \right) \Omega_{n-1}^{(n-1)}.$$

Trouvons enfin

$$\frac{\partial \Omega_{n-1}^{(n-1)}}{\partial \alpha}.$$

On a que

$$\frac{\partial \Omega_{n-1}^{(n-1)}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (dp_{0n-1} - p_{1n-1}\, dx\, p_{0n}\, dy) =$$
$$= d \frac{\partial p_{0n-1}}{\partial x} - \frac{\partial p_{1n-1}}{\partial x} dx - \frac{\partial p_{0n}}{\partial x} dy - p_{0n}\, d \frac{\partial y}{\partial x}$$

ou en vertu des équations (VII)

$$\frac{\partial \Omega_{n-1}^{(n-1)}}{\partial x} = dp_{1n-1} + \lambda_n p_{0n} - \frac{\partial p_{1n-1}}{\partial x} dx - \frac{\partial p_{0n}}{\partial x} dy.$$

En y substituant au lieu des

$$\frac{\partial p_{1n-1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_{0n}}{\partial x}$$

leurs valeurs d'après les équations (VII) et au lieu de dp_{1n-1} sa valeur (VIII), on a

$$\Delta \frac{\partial \Omega_{n-1}^{(n-1)}}{\partial \alpha} = (-1)^{n-1} \frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial (z p_{n-11} \ldots p_{2n-2})} \Omega^{(0)} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{\partial (u_1 \ldots u_{n-1})}{(p_{0n-1} p_{n-11} \ldots p_{2n-2})} \Omega_{n-1}^{(n-1)}.$$

On voit que les expresions différentielles

$$\Omega^{(0)} \ldots \Omega_{n-1}^{(n-1)}$$

où les variables $x, y, z, \ldots p_{0n}$ sont liées par les relations

$$u_i(xyz \ldots p_{0n}) = c_i \qquad i = 1 \ldots n-1$$

transformées par les formules

$$x = x_0 + \alpha - \alpha_0, \quad y = y(xx_0 \dots p^0_{0n}), \dots p_{0n} = p_{0n}(xx_0 \dots p^0_{0n})$$

satisfont aux équations différentielles ordinaires de la forme

$$\frac{\partial z_1}{\partial \alpha} = a_{11} z_1 + \cdots + a_{1m} z_m,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial z_m}{\partial \alpha} = a_{m1} z_1 + \cdots + a_{mm} z_m.$$

Il en suit qu'elles ont après cette transformation la forme

$$\Omega^{(0)} = b^{(0)} \left(\Omega^{(0)}\right)_0 + \cdots + c^{(0)} \left(\Omega^{(n-1)}_{n-1}\right)_0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Omega^{(n-1)}_{n-1} = b^{(n-1)}_{n-1} \left(\Omega^{(0)}\right)_0 + \cdots + c^{(n-1)}_{n-1} \left(\Omega^{(n-1)}_{n-1}\right)_0$$

où

$$\left(\Omega^{(0)}\right)_0, \dots \left(\Omega^{(n-1)}_{n-1}\right)_0$$

sont leurs valeurs pour $\alpha = \alpha_0$ c.-à-d.

$$\left(\Omega^{(0)}\right)_0 = dz_0 p^0_{10}\, dx_0 - p^0_{01}\, dy_0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left(\Omega_0^{(n-1)}\right)_0 = dp^0_{n-10} - \theta_0\, dx_0 - p^0_{n-11}\, dy_0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left(\Omega^{(n-1)}_{n-1}\right)_0 = dp^0_{0n-1} - p^0_{1n-1}\, dx_0 - p^0_{0n}\, dy_0$$

où les variables $x_0 \dots p^0_{0n}$ sont liées par les relations

$$u_i(x_0 \dots p^0_{0n}) = c_i \qquad i = 1 \dots n-1$$

et

$$\theta_0 = \theta(x_0 y_0 z_0 \dots p^0_{0n}).$$

Il en suit le procédé suivant de l'intégration du système pfaffien (I')

$$\Omega^{(0)} = 0, \quad \Omega_0^{(1)} = 0, \quad \Omega_1^{(1)} = 0, \dots \Omega^{(n-1)}_{n-1} = 0$$

à l'aide du système de N intégrales renfermant celles

$$u_i(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots p_{0n}) = c_i \qquad i = 1 \dots n-1$$

il faut intégrer le système pfaffien

$$(\Omega^{(0)})_0 = dz_0 - p^0_{10}\,dx_0 - p^0_{01}\,dy_0 = 0, \ldots \left(\Omega^{(n-1)}_{n-1}\right)_0 = \\ = dp^0_{0n-1} - p^0_{1n-1}\,dx_0 - p^0_{0n}\,dy_0 = 0$$

à l'aide du système de $N+1$ intégrales renfermant celles

$$u_i(x_0 y_0 z_0 \ldots p^0_{0n}) = c_i \qquad i = 1 \ldots n-1$$

ce qui est possible d'une infinité de manières et éxige l'intégration du système d'équations différentielles ordinaires. Soit ce système d'intégrales

$$\begin{aligned} u_i(x_0, y_0, z_0, \ldots p^0_{0n}) = c_i \;\; i = 1 \ldots n-1, \\ v_s(x_0, y_0, z_0, \ldots p^0_{0n}) = 0 \\ s = n, \quad n+1 \ldots N+1. \end{aligned} \tag{c}$$

Puis on élimine les $N+2$ variables $x_0, \ldots p^0_{0n}$ de ces équations et des $N+1$ formules de la transformation

$$y = y(xx_0 \ldots p^0_{0n}), \ldots p_{0n} = p_{0n}(xx_0 \ldots p^0_{0n}).$$

Les N équations obtenues

$$u_i(xyz \ldots p_{0n}) = c_i \;\; i = 1 \ldots n-1, \quad u_s(xyz \ldots p_{0n}) = 0 \\ s = n, \quad n+1 \ldots N$$

sera le système de N intégrales cherchées. Si ces équations sont résolubles par rapport aux $z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n}$ la fonction $z = f(xyc_1 \ldots c_{n-1})$ qu'on en tire est l'intégrale du système en involution

$$p_{n0} = \theta(xyzp_{10}p_{01} \ldots p_{0n}), \quad u_s(xyzp_{10}p_{01} \ldots p_{0n}) = c_i \qquad s = 1 \ldots n-1$$

$$\left(p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i\,\partial y^k}\right).$$

La forme la plus simple de ce procédé est: On cherche le système de $N+2$ fonctions d'un paramètre ω $x_0(\omega)$, $y_0(\omega)$, $\ldots p^0_{0n}(\omega)$ satisfaisant au système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dz_0(\omega)}{d\omega} - p^0_{10}(\omega)\frac{dz_0(\omega)}{d\omega} - p_{01}(\omega)\frac{dy_0(\omega)}{d\omega} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dp^0_{0n-1}(\omega)}{d\omega} - p^0_{1n-1}(\omega)\frac{dx_0(\omega)}{d\omega} - p^0_{0n}(\omega)\frac{dy_0(\omega)}{d\omega} = 0,$$

ainsi qu'aux équations

$$u_i[x_0(\omega), \quad y_0(\omega), \quad z_0(\omega), \ldots p^0_{0n}(\omega)] = c_i \qquad i = 1 \ldots n-1$$

et on élimine le paramètre ω du système de $N+1$ équations

$$y = y[x_0(\omega), \ldots p^0_{0n}(\omega)], \ldots p_{0n} = p_{0n}[x_0(\omega), \ldots p^0_{0n}(\omega)].$$

On pourrait supposer, que les c_i $i = 1 \ldots n-1$ soient les nombres déterminés pourvu que le déterminant

$$\Delta = \frac{\partial(u_1 \ldots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \ldots p_{1n-1})}$$

ne soit pas nul en vertu des équations

$$u_i(xyz \ldots p_{0n}) = c_i \qquad i = 1 \ldots n-1.$$

Avril 1932.

Ц. К. РУССЬЯН. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЛЮБОГО ПОРЯДКА ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

РЕЗЮМЕ

Настоящая статья представляет первый, насколько известно автору, опыт определения полного интеграла дифференциального уравнения в частных производных произвольного порядка n одной неизвестной функции двух переменных независимых

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n-1}, p_{1n-1} \ldots p_{0n}) \qquad (I)$$

$$\left(p_{ik} \equiv \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right).$$

Вопрос сводится к определению $n-1$ независимых функций

$$u_i(x, y, z, p_{10} \ldots p_{1n-1} \ldots p_{0n}) \qquad i = 1 \ldots n-1$$

от

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 2$$

переменных независимых $x, y, z, p_{10}, p_{01}, \ldots p_{0n-1}, p_{n-11} \ldots p_{0n}$, после чего требуется интегрирование систем только обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вопрос об их определении распадается на два случая: в первом случае эти функции должны удовлетворять дифференциальным уравнениям в частных

производных второго порядка, линейным относительно вторых производных каждой функции в отдельности; в этом случае есть только один полный интеграл данного диференциального уравнения (I), удовлетворяющий и системе $n-1$ независимых диференциальных уравнений того же порядка n

$$u_i(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots p_{n-11} \dots p_{0n}) = c_i \qquad i = 1 \dots n-1$$

$$\left(p_{ik} \equiv \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right). \tag{II}$$

На этот случай автор только указывает, а занимается лишь вторым случаем, когда эти функции должны удовлетворять диференциальным уравнениям с частными производными первого порядка, линейным относительно производных каждой функции в отдельности; в этом случае есть более одного полного интеграла дифференциального уравнения (I) удовлетворяющих и системе (II); они различны между собой, т. е. не получаются один из другого преобразованием произвольных постоянных. Уравнения, которым должны в этом случае удовлетворять функции u_i $i = 1 \dots n-1$ имеют вид

$$\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d(xp_{n-22} \dots p_{1n-1})} + \frac{\bar{d}(\theta u_1 \dots u_{n-1})}{d(yp_{n-11} \dots p_{1n-1})} - \lambda_n^{n-1} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d(yp_{n-11} \dots p_{2n-2})} = 0,$$

$$\frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d[xp_{n-11} \dots (p_{n-k-1\,k+1}) \dots p_{1n-1}]} + \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d[yp_{n-11} \dots (p_{n-k\,k}) \dots p_{1n-1}]} -$$

$$- \lambda_n^{n-k-1} \frac{\bar{d}(u_1 \dots u_{n-1})}{d(yp_{n-11} \dots p_{2n-2})} = 0 \qquad k = 1 \dots n-2$$

$$\lambda_n^{n-1} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-11}} - \lambda_n^{n-2} \frac{\partial u_i}{\partial p_{n-22}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial u_i}{\partial p_{0n}} = 0 \qquad i = 1 \dots n-1$$

с неравенством

$$\frac{\partial(u_1 \dots u_{n-1})}{\partial(p_{n-11} \dots p_{1n-1})} \neq 0,$$

где скобки указывают пропуск соответствующей переменной, и

$$\frac{\bar{d}}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p_{10} \frac{\partial}{\partial z} + p_{20} \frac{\partial}{\partial p_{10}} + p_{11} \frac{\partial}{\partial p_{01}} + \dots + p_{1n-2} \frac{\partial}{\partial p_{0n-2}} + \theta \frac{\partial}{\partial p_{n-10}} +$$
$$+ \dots + p_{0n-1} \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}},$$

$$\frac{\bar{d}}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + p_{01} \frac{\partial}{\partial z} + p_{11} \frac{\partial}{\partial p_{10}} + p_{02} \frac{\partial}{\partial p_{01}} + \dots + p_{0n-1} \frac{\partial}{\partial p_{0n-2}} + p_{n-11} \frac{\partial}{\partial p_{n-10}} +$$
$$+ \dots + p_{0n} \frac{\partial}{\partial p_{0n-1}}$$

а λ_n есть корень алгебраического уравнения n-ой степени

$$\lambda^n + \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-11}} \lambda^{n-1} - \frac{\partial \theta}{\partial p_{n-22}} \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial \theta}{\partial p_{0n}} = 0.$$

Автор называет в этом случае систему n диференциальных уравнений n-ого порядка

$$p_{n0} = \theta(x, y, z, p_{10}, \ldots p_{0n}), \quad u_i(x, y, z, p_{10}, \ldots p_{0n}) = c_i \qquad \text{(III)}$$
$$i = 1 \ldots n-1$$
$$\left(p_{ik} \equiv \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}\right),$$

системой в инволюции.

Чтобы определить полный интеграл дифференциального уравнения (I), удовлетворяющий и системе в инволюции (III), должно поступить следующим образом: определяется какое-либо решение u_n, не зависимое от $u_1 \ldots u_{n-1}$ линейного однородного уравнения

$$\frac{\bar{d}(f, u_1 \ldots u_{n-1})}{d(x, p_{n-1\,1} \cdots p_{1\,n-1})} + \frac{\bar{d}(f, u_1 \ldots u_{n-1})}{d[y p_{n-1\,1} \cdots (p_{1\,n-1}) p_{0n}]} = 0$$

такое, что

$$\frac{\partial(u_1 \ldots u_n)}{\partial(p_{n-1\,1} \cdots p_{0n})} \neq 0,$$

что возможно бесчисленным множеством способов. Затем находятся $\frac{n(n+1)}{2}$ решений, не зависимых от $u_1 \ldots u_n$ полной системы двух линейных однородных уравнений

$$\frac{\bar{d}(f, u_1 \ldots u_n)}{d(x p_{n-1\,1} \cdots p_{0n})} = 0, \quad \frac{\bar{d}(f, u_1 \ldots u_n)}{d(y, p_{n-1\,1} \cdots p_{0n})} = 0.$$

Если они суть $u_{n+1} \ldots u_N$ $\left(N = \frac{n(n+1)}{2} + n\right)$, функции $u_1 \ldots u_n$ определяют однозначно функции $u_{n+1} \ldots u_N$, но функции $u_1 \ldots u_{n-1}$ не определяют однозначно функций $u_n \ldots u_N$.

Функция $z = \varphi(x, y, c_1 \ldots c_N)$, определенная решением N конечных уравнений

$$u_i(x, y, z, p_{10} \ldots p_{0n}) = c_i \quad i = 1 \ldots N$$

относительно $z, p_{10}, \ldots p_{0n}$, есть искомый полный интеграл.

В § 2 автор излагает способ определения всех интегралов системы в инволюции (III). Вопрос приводится к интегрированию систем только обыкновенных диференциальных уравнений.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932.
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПЕРЕМЕЩАЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ В МЕТОДЕ АКАДЕМИКА А. Н. КРЫЛОВА

Н. Н. ЛУЗИНА

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ (ПОСЛЕДНЯЯ) *

§ 19. Доказанное предложение позволяет установить строение *всякого* характеристического многообразия H в случае II, когда перемещающий множитель M не тождественен нулю.

В самом деле, пусть H есть какое-нибудь характеристическое многообразие $\varkappa$ измерений, лежащее в пространстве E.

Рассмотрим H как самостоятельное пространство, в котором имеем афинное преобразование A'. Ясно, что в H нет двух различных характеристических прямых L_λ и $L_{\lambda'}$ с равными модулями сдвига $\lambda = \lambda'$, потому что H является частью пространства $\mathcal{E}$, для которого рассматривается случай II.

Таким образом, в пространстве H также имеет место случай II и, значит, в H мы имеем ограниченное число (пусть μ) характеристических прямых $L_1, L_2, \ldots, L_\mu$ каждой из которых соответствует ряд осевых многообразий. Пусть характеристической прямой L_i соответствуют в H осевые многообразия $E_1^{(i)} < E_2^{(i)} < \cdots < E_{\eta_i}^{(i)}$, где η_i есть число измерений максимального осевого многообразия для L_i, содержащегося в H. Согласно предыдущему, мы должны иметь

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \cdots + \eta_\mu = \varkappa. \qquad (241)$$

* Часть первая см. ИМЕН, 1932, № 5, стр. 595; часть вторая см. ИМЕН, 1932, № 6, стр. 735. В конце второй части (стр. 762) последняя часть § 19-го осталась, по техническому недосмотру, недопечатанной, в виду чего названный параграф перепечатывается здесь вновь, целиком.

Но в силу теоремы единственности осевых многообразий, осевые многообразия $E_1^{(i)}, E_2^{(i)}, \cdots, E_{\eta_i}^{(i)}$ для «малого» пространства H, являясь осевыми многообразиями и для целого пространства $\mathcal{E}$, образуют лишь начало полного ряда

$$E_1^{(i)},\ E_2^{(i)},\ E_3^{(i)},\ldots E_{\eta_i}^{(i)},\ldots,\ E_{e_i}^{(i)} \tag{242}$$

осевых многообразий для пространства $\mathcal{E}$. Отсюда мы можем заключить, что в характеристическом многообразии H содержатся осевые многообразия $E_{\eta_i}^{(i)}$ и не могут содержаться бо́льшие осевые многообразия.

Так как указанные осевые многообразия $E_{\eta_i}^{(i)}$ не могут между собою пересекаться (исключая начала 0), то, в силу формулы (241), следует, что многообразие H есть наименьшее евклидово многообразие, охватывающее осевые многообразия $E_{\eta_i}^{(i)}$. С другой стороны мы знаем, что всякое минимальное евклидово многообразие $\mathcal{E}'$, содержащее какие-нибудь характеристические многообразия $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots$ является само также характеристическим.

Отсюда мы имеем предложение для случая II, вполне аналогичное соответствующему предложению для случая I (см. § 11, конец):

Если вековое уравнение (1) имеет кратные корни, но перемещающий множитель не тождественен нулю, тогда всякое характеристическое многообразие H содержит в себе в точности такие осевые многообразия, чтобы сумма их измерений была бы равна измерению многообразия H.

Или это можно выразить еще иначе, сказав, что в случае нетождественности перемещающего множителя нулю, получают все без исключения характеристические многообразия в пространстве $\mathcal{E}$, беря различные совокупности осевых многообразий и обтягивая каждую из этих совокупностей минимальным евклидовым многообразием.

§ 20. Приложим полученные результаты к перемещающему множителю.

Пусть в пространстве $\mathcal{E}$ нами взята какая-нибудь точка $P(a, b, c \ldots, f)$, отличная от начала 0 и, следовательно, определяющая вектор V. Пусть, согласно обозначениям начала § 11, вектора

$$V,\ V_1,\ V_2,\ldots,\ V_{\mu-1},\ V_\mu \tag{183}$$

будут последовательными преобразованиями вектора V помощью подстановки A', причем V_μ есть первый зависимый вектор. Далее, пусть $\mathcal{E}_{\mu-1}$ есть минимальное характеристическое многообразие, содержащее точку P; мы

знаем, что $\mathcal{E}_{\mu-1}$ есть многообразие μ измерений, и что оно содержит вектора (183).

Так как перемещающий множитель $M(a, b, c, \ldots, f)$ имеет своим выражением

$$M(a, b, c, \ldots, f) = \begin{vmatrix} a & b & c & \ldots & f \\ a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} & \ldots & f_{k-1} \end{vmatrix} \qquad \text{(I)}$$

то необходимым и достаточным условием для того, чтобы $M(a, b, c, \ldots, f)$ был нулем, является, чтобы характеристическое многообразие $\mathcal{E}_{\mu-1}$ не совпадало с целым пространством $\mathcal{E}$, а было бы его собственной частью (в тесном смысле). Действительно, строка $a_i, b_i, c_i, \ldots, f_i$ определителя (I) состоит из компонент вектора V_i, и уничтожение определителя (I) показывает, что одна из его строк есть линейная комбинация остальных и, значит, среди векторов $V, V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}$ имеется зависимый вектор. Следовательро $\mu \leq k-1$ и, значит, число измерений многообразия $\mathcal{E}_{\mu-1}$ меньше числа измерений k пространства $\mathcal{E}$. Обратное — очевидно.

Следовательно, *для того, чтобы имели*

$$M(a, b, c, \ldots, f) \neq 0$$

необходимо и достаточно, чтобы точка $P(a, b, c, \ldots f)$ *не принадлежала ни одному из характеристических многообразий, меньшего чем* k *измерений.*

Легко осуществить это условие геометрически. Для этого составим сначала для ясности полную таблицу всех осевых многообразий в пространстве $\mathcal{E}$

$$\left.\begin{array}{l} E_1^{(1)} < E_2^{(1)} < E_3^{(1)} < \ldots < E_{e_1}^{(1)} \\ E_1^{(2)} < E_2^{(2)} < E_3^{(2)} < \ldots < E_{e_2}^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_1^{(i)} < E_2^{(i)} < E_3^{(i)} < \ldots < E_{e_i}^{(i)} \\ E_1^{(m)} < E_2^{(m)} < E_3^{(m)} < \ldots < E_{e_m}^{(m)} \end{array}\right\} \qquad (243)$$

и, взяв какое-нибудь число i среди чисел 1, 2, 3, . . ., m, проведем *минимальное* евклидово многообразие Π_i чрез осевые многообразия

$$E^{(1)}_{e_1},\ E^{(2)}_{e_2},\ \ldots,\ E^{(i-1)}_{e_{i-1}},\ E^{(i)}_{e_i-1},\ E^{(i+1)}_{e_{i+1}},\ \ldots,\ E^{(m)}_{e_m}. \qquad (244)$$

Эти осевые многообразия выбраны так, что для всех характеристических прямых L_j берутся максимальные осевые многообразия $E^{(j)}_{e}$. за исключением прямой L_i, для которой берется не $E^{(i)}_{e_i}$, а предыдущее многообразие $E^{(i)}_{e_i-1}$.

Так как все многообразия (244) суть без общей точки попарно (исключая начала 0), то числом измерений многообразия Π_i является сумма изменений многообразий (244), т. е.

$$\begin{gathered} e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_{i-1} + \\ + (e_i - 1) + e_{i+1} + \cdots + e_m = k - 1. \end{gathered} \qquad (246)$$

Таким образом Π_i есть просто гиперплоскость в пространстве $\mathcal{E}$ и, следовательно, *перемещающий множитель* $M(a, b, c, \ldots, f)$ *не равен нулю тогда и только тогда, когда точка* $P(a, b, c, \ldots f)$, *не принадлежит ни к одной из т гиперплоскостей*

$$\Pi_1,\ \Pi_2,\ \Pi_3,\ \ldots,\ \Pi_m. \qquad (247)$$

Легко сблизить этот геометрический результат с полученным ранее аналитическим выражением (139) для перемещающего множителя M^*. Действительно, из этого выражения видно, что M^* обратится в нуль тогда и только тогда, когда какой-нибудь из параметров h_i^* обратится в нуль:

$$h_i^* = 0 \qquad (248)$$

здесь i есть одно из чисел 1, 2, 3, . . ., m.

При этом важно заметить, что матрица A^*, к которой и относится перемещающий множитель M^*, имеет приведенный вид (95). Следовательно, матрица $A^{*\prime}$ имеет вид (211) и (212). Поэтому, преобразование пространства $\mathcal{E}$, определяемое подстановкой $A^{*\prime}$ и написаное полностью, будет:

$$
\left.\begin{array}{l}
Y_1 = \lambda_1 x_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_{t_{i-1}} = x_{t_{i-1}-1} + \lambda_{i-1} x_{t_{i-1}} \\
\left\{\begin{array}{l}
Y_{s_i} = \lambda_i x_{s_i} \\
Y_{s_i+1} = x_{s_i} + \lambda_i x_{s_i+1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_{t_i} = x_{t_i-1} + \lambda_i x_{t_i}
\end{array}\right. \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_k = x_{k-1} + \lambda_i x_k
\end{array}\right\} \qquad (249)
$$

где s_i и t_i обозначают нумера соответственно первой и последней строки (и столбца) i-ой частной матрицы $A_i^{*\prime}$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, m$). Из этих уравнений видно, что гиперплоскость

$$x_{s_i} = 0 \qquad (250)$$

является характеристической по отношению к $A^{*\prime}$. Ясно, далее, что эта гиперплоскость содержит в себе максимальные осевые многообразия, соответствующие всем характеристическим прямым L_i, кроме L_i, но содержит многообразие $E^{(i)}_{e_i-1}$, отвечающее этой прямой.

Отсюда мы заключаем, что гиперплоскость (250) тождественна рассмотренной выше гиперплоскости Π_i.

С другой стороны, параметр h_i^*, согласно его определению, обозначал выше (стр. 605) именно тот самый параметр, который имеет нумер первого столбца частной матрицы $A_i^{*\prime}$. Поэтому, уравнение (248) тождественно уравнению (250), т. е. определяет гиперплоскость Π_i.

Отсюда, отнесясь к формуле (139*), мы видим, что уравнения гиперплоскостей Π_1, Π_2, Π_3, ..., Π_m суть соответственно

$$L_1 = 0,\ L_2 = 0,\ L_3 = 0,\ \ldots,\ L_m = 0, \qquad (251)$$

где $L_1, L_2, \ldots, L_m$ обозначают линейные формы букв $a, b, c, \ldots, f$, стоящие в правых частях формул (92), прочитывая последовательно эти формулы сверху вниз.

§ **21.** Мы переходим теперь к нашей основной задаче: *определить корни и их кратность в алгебраическом уравнении акад. А. Н. Крылова*

$$D(\lambda)=0. \tag{V*}$$

Так как $\mathcal{E}_{\mu-1}$ есть минимальное характеристическое многообразие, содержащее точку $P(a, b, c, \ldots, f)$, то из того, что было сказано в предшествующем параграфе, следует, что точка P должна занимать в многообразии $\mathcal{E}_{\mu-1}$ точно такое же положение, какое она имела бы в пространстве $\mathcal{E}$ для того, чтобы перемещающий множитель

$$M(a, b, c, \ldots, f)$$

не был равен нулю.

Это обстоятельство легко позволяет судить о корнях алгебраического уравнения $D(\lambda)=0$ (V^*).

Предварительно сделаем такое замечание: рассматриваемое алгебраическое уравнение $D(\lambda)=0$ (V^*), так же как и дифференциальное уравнение $D(x)=0$ (V) являются оба ничем иным, как переписанным в новых обозначениях и ранее установленным *векторным* линейным соотношением

$$V_\mu = g_0 V + g_1 V_1 + g_2 V_2 + \cdots + g_{\mu-1} V_{\mu-1}. \tag{180}$$

А это векторное соотношение, как таковое, есть инвариант не только при преобразованиях осей координат, но и для всех преобразований матрицы

$$A^* = B^{-1} AB$$

какова бы ни была матрица B, выполняющая это преобразование.

Это важное обстоятельство, впрочем, легко проверить следующим образом: преобразуем матрицу A по формуле

$$A^* = B^{-1} AB \tag{81}$$

и обратимся к уравнениям (93)

$$\left.\begin{aligned} a_p^* &= b_{11} a_p + b_{21} b_p + b_{31} c_p + \cdots + b_{k1} f_p \\ b_p^* &= b_{12} a_p + b_{22} b_p + b_{32} c_p + \cdots + b_{k2} f_p \\ c_p^* &= b_{13} a_p + b_{23} b_p + b_{33} c_p + \cdots + b_{k3} f_p \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_p^* &= b_{1k} a_p + b_{2k} b_p + b_{3k} c_p + \cdots + b_{kk} f_p \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

связывающим между собою элементы обеих матриц:

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c & \dots & f \\ a_1 & b_1 & c_1 & \dots & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p & b_p & c_p & \dots & f_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & b_k & c_k & \dots & f_k \end{matrix}\right\| \quad \text{и} \quad \left\|\begin{matrix} a^* & b^* & c^* & \dots & f^* \\ a_1^* & b_1^* & c_1^* & \dots & f_1^* \\ a_2^* & b_2^* & c_2^* & \dots & f_2^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p^* & b_p^* & c_p^* & \dots & f_p^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k^* & b_k^* & c_k^* & \dots & f_k^* \end{matrix}\right\| \qquad (252)$$

Мы отметим, что $a_p, b_p, c_p, \dots, f_p$ суть компоненты вектора V_p и $a_p^*, b_p^*, c_p^*, \dots f_p^*$ суть компоненты вектора V_p^*, являющегося преобразованием вектора V_p помощью подстановки B' (см. стр. 938 нашей цитированной статьи). Заметим также, что в то время как левая таблица развивается, отправляясь от $a, b, c, \dots, f$ последовательным применением к ее строкам одной и той же самой подстановки A', правая таблица развивается, отправляясь от $a^*, b^*, c^*, \dots, f^*$ последовательным применением подстановки $A^{*\prime} = B' A' B'^{-1}$.

Напомнив это, легко теперь видеть, что если какой-нибудь вектор V_μ есть линейная комбинация предыдущих векторов

$$V_\mu = g_0 V + g_1 V_1 + g_2 V_2 + \dots + g_{\mu-1} V_{\mu-1}, \qquad (180)$$

то и преобразованный вектор V_μ^* есть также линейная комбинация предыдуших преобразованных векторов **с теми же самыми множителями линейной комбинации** $g_0, g_1, g_2, \dots, g_{\mu-1}$.

Действительно, в силу уравнений (93) мы имеем

$$\left.\begin{aligned} a^* &= b_{11} a + b_{21} b + b_{31} c + \dots + b_{k1} f \\ a_1^* &= b_{11} a_1 + b_{21} b_1 + b_{31} c_1 + \dots + b_{k1} f_1 \\ a_2^* &= b_{11} a_2 + b_{21} b_2 + b_{31} c_2 + \dots + b_{k1} f_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a^*_{\mu-1} &= b_{11} a_{\mu-1} + b_{21} b_{\mu-1} + b_{31} c_{\mu-1} + \dots + b_{k1} f_{\mu-1} \\ a_\mu^* &= b_{11} a_\mu + b_{21} b_\mu + b_{31} c_\mu + \dots + b_{k1} f_\mu \end{aligned}\right\} \qquad (253)$$

Теперь, так как в силу векторного равенства (180) μ-ая строка левой матрицы (252) есть линейная комбинация предыдуших строк с множителями линейной комбинации $g_0, g_1, g_2, \ldots, g_{\mu-1}$, то, умножая последовательно равенства (253) на $g, g_1, g_2, \ldots, g_{\mu-1}$, мы получим

$$a^*_\mu = g_0 a^* + g_1 a_1^* + g_2 a_2^* + \cdots + g_{\mu-1} a^*_{\mu-1}.$$

Подобным же образом доказываются равенства

$$b_\mu^* = g_0 b^* + g_1 b_1^* + g_2 b_2^* + \cdots + g_{\mu-1} b^*_{\mu-1}$$

$$c^*_\mu = g_0 c^* + g_1 c_1^* + g_2 c_2^* + \cdots + g_{\mu-1} c^*_{\mu-1}$$

. . . .

$$f_\mu^* = g_0 f^* + g_1 f_1^* + g_2 f_2^* + \cdots + g_{\mu-1} f^*_{\mu-1}.$$

Таким образом мы имеем векторное равенство

$$V_\mu^* = g_0 V^* + g_1 V_1^* + g_2 V_2^* + \cdots + g_{\mu-1} V^*_{\mu-1}. \qquad (254)$$

(Ч. т. д.).

Итак, *ни преобразование системы декартовых осей координат, ни более общее преобразование матрицы A в $A^* = B^{-1} AB$ нисколько не изменяют алгебраического уравнения $D(\lambda) = 0$ (V^*), составляемого в методе акад. А. Н. Крылова.*

Установив это, возьмем минимальное евклидово многообразие $\mathscr{E}_{\mu-1}$, содержащее рассматриваемую точку $P(a, b, c, \ldots, f)$ и возьмем в пространстве $\mathscr{E}$ такую систему осей координат, чтобы первые μ осей: $OX_1, OX_2, \ldots, OX_\mu$ содержались бы в $\mathscr{E}_{\mu-1}$.

При таком выборе осей координат, координатами точкп P будут числа

$$a^*, b^*, c^*, \ldots, h^*, 0, 0, \ldots, 0 \qquad (255)$$

где h^* есть число, стоящее на μ-ом месте, считая слева направо, этой строки.

Самая же матрица A' после такого преобразования осей координат примет вид

$$A^{*\prime} = \begin{Vmatrix} a^*_{11}\, a^*_{12} \ldots a^*_{1\mu}\, a^*_{1,\mu+1} \ldots a^*_{1k} \\ a^*_{21}\, a^*_{22} \ldots a^*_{2\mu}\, a^*_{2,\mu+1} \ldots a^*_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\mu1}^*, a^*_{\mu2} \ldots a^*_{\mu\mu}\, a^*_{\mu,\mu+1} \ldots a^*_{\mu k} \\ 0 \quad 0 \ldots 0 \quad a^*_{\mu+1,\mu+1} \ldots a^*_{\mu+1,k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \ldots 0 \quad a^*_{k,\mu+1} \ldots a^*_{kk} \end{Vmatrix} \qquad (256)$$

в ней элементы, занимающие первых μ столбцев и последних $k-\mu$ строк, суть нули.

Если теперь мы, в целях составления по методе акад. А. Н. Крылова алгебраического уравнения $D(\lambda)=0$ (V^*), станем выписывать элементы правой из матриц (252), то получим матрицу

$$\begin{Vmatrix} a^* & b^* & c^* & \ldots & h^* & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ a_1^* & b_1^* & c^*_1 & \ldots & h_1^* & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ a_2^* & b_2^* & c_2^* & \ldots & h_2^* & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & & & & & & & \ldots \\ a^*_{\mu-1} & b^*_{\mu-1} & c^*_{\mu-1} & \ldots & h^*_{\mu-1} & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ a_\mu^* & b_\mu^* & c_\mu^* & \ldots & h_\mu^* & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & & & & & & & \ldots \\ a_k^* & b_k^* & c_k^* & \ldots & h_k^* & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \end{Vmatrix} \qquad (257)$$

где все элементы последних $k-\mu$ столбцев суть нули, и где элементы первых μ столбцев образованы так, как если бы мы оперировали в пространстве μ измерений, где располагаются оси $OX_1, OX_2, \ldots, OX_\mu$, отправляясь от точки $P(a^*, b^*, c^*, \ldots, f^*)$ при помощи усеченной (квадратной) матрицы

$$\begin{Vmatrix} a^*_{11}\, a^*_{21} \ldots a^*_{\mu1} \\ a^*_{12}\, a^*_{22} \ldots a^*_{\mu2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a^*_{1\mu}\, a^*_{2\mu} \ldots a^*_{\mu\mu} \end{Vmatrix} \qquad (258$$

Но многообразие $\mathcal{E}_{\mu-1}$ есть *минимальное* характеристическое многообразие, содержащее точку $P(a, b, c, \ldots, f)$. Поэтому, как мы видели выше, перемещающий множитель $M(a^*, b^*, c^*, \ldots, h^*)$ должен быть отличным от нуля

$$\begin{vmatrix} a^* & b^* & c^* & \ldots & h^* \\ a_1^* & b_1^* & c_1^* & \ldots & h_1^* \\ a_2^* & b_2^* & c_2^* & \ldots & h_2^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^*_{\mu-1} & b^*_{\mu-1} & c^*_{\mu-1} & \ldots & h^*_{\mu-1} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{259}$$

Следовательно вектор, $V_\mu(a_\mu^*, b_\mu^*, c_\mu^*, \ldots, h_\mu^*)$ будет *первый* зависимый вектор среди векторов

$$V, V_1, V_2, \ldots, V_{\mu-1}, V_\mu, \tag{260}$$

где V_i обозначает вектор $V_i(a_i^*, b_i^*, c_i^*, \ldots, h_i^*)$. Таким образом, мы будем иметь векторное соотношение

$$V_\mu = g_0 V + g_1 V_1 + g_2 V_2 + \cdots + g_{\mu-1} V_{\mu-1} \tag{180}$$

Мы знаем, что векторное соотношение не зависит от выбора осей координат, и, значит, уравнением $D(\lambda) = 0$ (V^*) в рассматриваемом случае будет

$$\lambda^\mu = g_0 + g_1\lambda + g_2\lambda^2 + \cdots + g_{\mu-1}\lambda^{\mu-1}. \tag{261}$$

Ввиду того, что перемещающий множитель $M(a^*, b^*, c^*, \ldots, h^*)$ отличен от нуля, уравнение (261) можно написать в виде

$$\Delta_1^*(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & a^* & b^* & c^* & \ldots & h^* \\ \lambda & a_1^* & b_1^* & c_1^* & \ldots & h_1^* \\ \lambda^2 & a_2^* & b_2^* & c_2^* & \ldots & h_2^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^\mu & a_\mu^* & b_\mu^* & c_\mu^* & \ldots & h_\mu^* \end{vmatrix} = 0 \tag{6*}$$

Из теории акад. А. Н. Крылова, изложенной в нашей цитированной статье, следует, что корни уравнения (6*) суть те же самые и с тою же самою кратностью, как и корни векового уравнения

$$\Delta^*(\lambda) = \begin{vmatrix} a^*_{11} - \lambda & a^*_{12} & \dots & a^*_{1\mu} \\ a^*_{21} & a^*_{22} - \lambda & \dots & a^*_{2\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^*_{\mu 1} & a^*_{\mu 2} & \dots & a^*_{\mu\mu} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1^*)$$

и, следовательно, по отношению к данному вековому уравнению (1) *это будут все такие корни* $\lambda', \lambda'', \lambda''', \dots$ *данного векового уравнения* (1), *которые являются модулями сдвига характеристических прямых, находящихся в многообразии* $\mathcal{E}_{\mu-1}$ *и в таких кратностях, которые равны числам измерений максимальных осевых многообразий, находящихся в* $\mathcal{E}_{\mu-1}$.

Таким образом, полным решением задачи о корнях алгебраического уравнения $D(\lambda) = 0$ (V^*), составляемого по методе акад. А. Н. Крылова, будет:

Если минимальное характеристическое многообразие $\mathcal{E}_{\mu-1}$, *содержащее точку* $P(a, b, c, \dots, f)$, *содержит характеристические прямые модулей сдвига* $\lambda', \lambda'', \lambda''', \dots, \lambda^{(\nu)}$, *и если числа измерений максимальных облекающих их осевых многообразий суть* $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \dots, \varkappa_\nu$, *то уравнение*

$$D(\lambda) = 0 \qquad (V^*)$$

имеет своими корнями $\lambda', \lambda'', \lambda''', \dots, \lambda^{(\nu)}$ *в кратностях* $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \dots \varkappa_\nu$.

Так как всегда можно выбрать *любые* характеристичоские прямые

$$L_{\lambda'}, L_{\lambda''}, \dots, L_{\lambda^{(\nu)}}$$

и, выбрав облекающие их осевые многообразия $E^{\lambda'}_{\varkappa_1}, E^{\lambda''}_{\varkappa_2}, \dots, E^{\lambda^{(\nu)}}_{\varkappa_\nu}$ наперед заданных чисел измерений, соответственно равных $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_\nu$

$$(1 \leqslant \varkappa_1 \leqslant e_1,\ 1 \leqslant \varkappa_2 \leqslant e_2, \dots,\ 1 \leqslant \varkappa_\nu \leqslant e_\nu),$$

обтянуть их минимальным евклидовым многообразием $\mathcal{E}_{\mu-1}$, и, затем, взять в $\mathcal{E}_{\mu-1}$ точку $P(a, b, c, \dots, f)$, для которой $\mathcal{E}_{\mu-1}$ есть минимальное ха-

рактеристическое многообразие, содержащее P, то отсюда заключаем о справедливости предложения:

Теорема IV''. *Если перемещающий множитель не тождественен нулю, алгебраическое уравнение $D(\lambda)=0$ (V^*) при надлежаще подобранных численных величинах параметров a, b, c, ..., f представит произвольный случай вырождения как в отношении самих корней векового уравнения, так и в отношении их кратностей.*

§ 22. Мы переходим теперь к последнему случаю:

Случай III: вековое уравнение имеет перемещающий множитель тождественным нулю.

Для полного освещения этого случая следовало бы подробно рассмотреть — как мы это делали ранее — ориентацию многообразия $\mathcal{E}_{\mu-1}$ по отношению к таким основным элементам, каковы: характеристические прямые и осевые многообразия.

Мы ограничимся лишь следующими замечаниями.

Минимальное характеристическое многообразие $\mathcal{E}_{\mu-1}$, содержащее точку P, не может содержать двух различных характеристических прямых с одинаковым модулем сдвига.

Чтобы убедиться в этом напомним, что в § 21, в ходе доказательства инвариантности векторного соотношения (180) при изменении осей координат или при преобразовании данной матрицы A, мы видели, что все дело происходит таким образом, как если бы многообразие $\mathcal{E}_{\mu-1}$ было всем пространством $\mathcal{E}$, а не его частью. Этим мы хотим сказать, что когда мы помещаем в $\mathcal{E}_{\mu-1}$ μ первых осей координат $OX_1, OX_2, \ldots, OX_\mu$, то можем пренебрегать остальными точками пространства $\mathcal{E}$ и рассматривать вместо всей матрицы $A^{*\prime}$ только ту часть ее

$$\left\| \begin{matrix} a^*_{11} & a^*_{21} & \ldots & a^*_{\mu 1} \\ a^*_{12} & a^*_{22} & \ldots & a^*_{\mu 2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^*_{1\mu} & a^*_{2\mu} & \ldots & a^*_{\mu\mu} \end{matrix} \right\| \tag{258}$$

которая относится к осям координат, лежащим в многообразии $\mathcal{E}_{\mu-1}$, и также принимать во внимание координаты точки P лишь относительно этих осей координат.

В этих условиях перемещающий множитель

$$M(a^*, b^*, c^*, \ldots, h^*) = \begin{vmatrix} a^*, & b^*, & c^*, & \ldots, & h^* \\ a_1^*, & b_1^*, & c_1^*, & \ldots, & h_1^* \\ a_2^*, & b_2^*, & c_2^*, & \ldots, & h_2^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^*_{\mu-1}, & b^*_{\mu-1}, & c^*_{\mu-1}, & \ldots, & h^*_{\mu-1} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (259)$$

непременно должен быть отличным от нуля. В самом деле, вектор $OP = V$, при повторном применении к нему подстановки A', переходит последовательно в вектора

$$V, V_1, V_2, \ldots, V_{\mu-1}, V_\mu, \quad (183)$$

из которых V_μ, по самому определению многообразия $\mathcal{E}_{\mu-1}$, есть *первый* зависимый вектор. Следовательно, все предыдущие вектора $V, V_1, V_2, \ldots, V_{\mu-1}$ образуют систему μ независимых векторов; но аналитическим выражением этой независимости как раз и является неравенство определителя (259) нулю.

С другой стороны, раз перемещающий множитель $M(a^*, b^*, c^*, \ldots, h^*)$ отличен от нуля, то это значит, что в пространстве $\mathcal{E}_{\mu-1}$, рассматриваемом как целое пространство, случай III уже не существует более, но уступает свое место случаю II или случаю I. А при этих последних случаях нет двух различных характеристических прямых с равными модулями сдвига. (Ч. т. д.).

Таким образом, мы видим, что

В минимальном характеристическом многообразии $\mathcal{E}_{\mu-1}$, содержащем точку P и рассматриваемом как целое пространство, могут иметь место только либо *случай II*, либо *случай I, причем перемещающий множитель относительно многообразия $\mathcal{E}_{\mu-1}$ отличен от нуля.*

Это замечание позволяет немедленно разрешить нашу основную задачу: *определить корни и их кратность в алгебраическом уравнении акад. А. Н. Крылова $D(\lambda) = 0$ (V*).*

Действительно, раз относительно многообразия $\mathcal{E}_{\mu-1}$ осуществлен случай II (или случай I), то в $\mathcal{E}_{\mu-1}$ содержится лишь ограниченное число характеристических прямых $L', L'', L''', \ldots, L^{(\nu)}$ с неравными друг другу

модулями сдвига $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots, \lambda^{(\nu)}$. Каждая из этих характеристических прямых $L^{(i)}$ окружена максимальным в $\mathcal{E}_{\mu-1}$ осевым многообразием $E^{(i)}$; пусть число измерений многообразия $E^{(i)}$ есть $\varkappa_i$. Имеем

$$\mu = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \cdots + \varkappa_\nu. \tag{262}$$

Так как перемещающий множитель относительно многообразия $\mathcal{E}_{\mu-1}$ отличен от нуля

$$M(a^*, b^*, c^*, \ldots, h^*) \neq 0, \tag{263}$$

то, применяя к рассматриваемому случаю все то, что нами было найдено выше при изучении случаев I и II, мы заключаем, что уравнение $D(\lambda) = 0$ (V*) должно иметь своими корнями количества λ', λ'', $\lambda'', \ldots, \lambda^{(\nu)}$ в кратностях $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots, \varkappa_\nu$.

Таким образом, полным решением задачи о корнях алгебраического уравнения $D(\lambda) = 0$ (V*), составляемого по методе акад. А. Н. Крылова, будет:

Если минимальное характеристическое многообразие $\mathcal{E}_{\mu-1}$, содержащее точку $P(a, b, c, \ldots, f)$, содержит характеристические прямые модулей сдвига $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots, \lambda^{(\nu)}$, и если числа измерений максимальных в $\mathcal{E}_{\mu-1}$ и облекающих эти прямые осевых многообразий суть $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots, \varkappa_\nu$, то уравнение $D(\lambda) = 0$ (V^*) имеет своими корнями количества λ', λ'', $\lambda''', \ldots, \lambda^{(\nu)}$ в кратностях $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots, \varkappa_\nu$. При этом, самое алгебраическое уравнение $D(\lambda) = 0$ (V^*) можно составить по методе перемещающего множителя, который относительно многообразия $\mathcal{E}_{\mu-1}$ отличен от нуля, $M(a^*, b^*, c^*, \ldots, h^*) \neq 0$.

Напротив, вследствие недостаточности сведений относительно ориентации многообразия $\mathcal{E}_{\mu-1}$ в пространстве $\mathcal{E}$, мы уже не имеем полного решения задачи о степени вырождения уравнения $D(\lambda) = 0$ (V*).

Все, чем мы располагаем, состоит в следующем замечании.

Приведенная форма (211) данной матрицы A' показывает нам (см. § 16), что в данном k-мерном пространстве $\mathcal{E}$ имеется m существенно-различных характеристических прямых

$$L_1, L_2, L_3, \ldots, L_m \tag{264}$$

с соответственными модулями сдвига

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m, \tag{97}$$

могущими оказаться и равными один другому. Указанные характеристические прямые (264) соответственно окружены осевыми многообразиями

$$E^{(1)}_{e_1},\ E^{(2)}_{e_2},\ E^{(3)}_{e_3},\ \ldots,\ E^{(m)}_{e_m}, \tag{265}$$

где нижние индексы $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m$ являются соответственными числами измерений этих осевых многообразий; при этом имеем

$$k = e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_m. \tag{266}$$

Количество $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и индексы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ вполне определяют элементарные делители Вейерштрасса данной матрицы A:

$$(\lambda - \lambda_1)^{e_1},\ (\lambda - \lambda_2)^{e_2},\ (\lambda - \lambda_3)^{e_3},\ \ldots,\ (\lambda - \lambda_m)^{e_m}. \tag{98}$$

Выберем теперь среди количеств (97) количества

$$\lambda',\ \lambda'',\ \lambda''',\ \ldots,\ \lambda^{(\nu)} \tag{267}$$

существенно различные друг от друга, и рассмотрим соответствующие им характеристические прямые

$$L_{\lambda'},\ L_{\lambda''},\ L_{\lambda'''},\ \ldots,\ L_{\lambda^{(\nu)}}, \tag{268}$$

взятые среди характеристических прямых (264) с соответственными им окружающими их осевыми многообразиями

$$E'_{e'},\ E''_{e''},\ E'''_{e'''},\ \ldots,\ E^{(\nu)}_{e^{(\nu)}}, \tag{269}$$

взятыми из осевых многообразий (265). Здесь значек $e^{(i)}$ есть число измерений осевого многообразия $E^{(i)}_{e^{(i)}}$.

Сделав это, охватим все многообразия (269) минимальным евклидовым многообразием $\mathcal{E}'$. Ясно, что $\mathcal{E}'$ есть многообразие характеристическое. Докажем, что $\mathcal{E}'$ не содержит никакой другой характеристической прямой, кроме прямых (268).

Чтобы убедиться в этом, достаточно удостоверить указанный факт лишь для приведенной формы (211) данной матрицы A', потому что мы знаем (см. § 14), что переход от приведенной матрицы $A^{*\prime}$ к первоначальной A' сопровождается преобразованием пространства $\mathcal{E}$ самого в себя, при-

чем всякое характеристическое многообразие переходит в характеристическое же многообразие равного числа измерений и, в частности, всякая характеристическая прямая переходит в таковую же.

Но в случае приведенной матрицы $A^{*\prime}$ осевое многообразие $E^{(i)}_{e^{(i)}}$ содержит в себе $e^{(i)}$ осей координат, причем взятую в пространстве $\mathcal{E}$ систему координат всегда можно предположить прямоугольной. Отсюда ясно, что многообразие $\mathcal{E}'$ имеет своим измерением число k', равное сумме измерений многообразий $E^{(i)}_{e^{(i)}}$

$$k' = e' + e'' + e''' + \cdots + e^{(\nu)} \tag{270}$$

Следовательно, получают многообразие $\mathcal{E}'$ просто полагая равными нулю те из параметров $a, b, c, \ldots, f$, которые соответствуют осям координат, не принадлежащим многообразию $\mathcal{E}'$, величины же остальных параметров, считая численно-произвольными. Ясно, что при этом подстановка A', преобразующая многообразие $\mathcal{E}'$, рассматриваемое как целое пространство, само в себя, получает вид приведенной матрицы с k' строками и столбцами и с взаимно-простыми элементарными делителями Вейерштрасса

$$(\lambda - \lambda')^{e'},\ (\lambda - \lambda'')^{e''},\ (\lambda - \lambda''')^{e'''},\ \ldots,\ (\lambda - \lambda^{(\nu)})^{e^{(\nu)}} \tag{271}$$

А это обстоятельство, в согласии с равенством (270), и обозначает, что в многообразии $\mathcal{E}'$ нет других характеристических прямых, кроме прямых (268) (ч. т. д.).

Таким образом, в характеристическом многообразии $\mathcal{E}'$ осуществлен случай II. Но тогда, в силу теоремы IV'' (стр. 1076), мы всегда можем выбрать в многообразии $\mathcal{E}'$ точку $P(a, b, c, \ldots, f)$ таким образом, чтобы уравнение $D(\lambda) = 0$ (V*), составляемое по методе акад. А. Н. Крылова, имело своими корнями количества $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots, \lambda^{(\nu)}$ (267) в кратностях, соответственно не превосходящих целых положительных чисел $e', e'', e''', \ldots, e^{(\nu)}$.

Отсюда мы заключаем о справедливости предложения:

Теорема IV'''. *Если перемещающий множитель $M(a, b, c, \ldots, f)$ тождественно равен нулю, алгебраическое уравнение $D(\lambda) = 0$ (V*), составляемое по методе акад. А. Н. Крылова, при надлежаще подобранных численных величинах параметров $a, b, c, \ldots, f$, имеет своими корнями $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$ любую совокупность численно-различных между собою корней векового уравнения* (1) *в любых кратностях $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$, не превосхо-*

дящих максимальных показателей степеней e', e'', e''', ... *элементарных делителей Вейерштрасса* $(\lambda-\lambda')^{e'}$, $(\lambda-\lambda'')^{e''}$, $(\lambda-\lambda''')^{e'''}$, ..., *соответствующих этим корням*: $1 \leqslant \varkappa_1 \leqslant e'$, $1 \leqslant \varkappa_2 \leqslant e''$, $1 \leqslant \varkappa_3 \leqslant e'''$, ...

При оценке этого предложения следует помнить, что в рассматриваемом случае III, в отличие от предыдущих случаев, каждому корню $\lambda^{(i)}$ векового уравнения (1) отвечает, вообще говоря, не один, а *несколько* элементарных делителей Вейерштрасса

$$(\lambda-\lambda^{(i)})^{e_r},\ (\lambda-\lambda^{(i)})^{e_s},\ (\lambda-\lambda^{(i)})^{e_t},\ \ldots, \tag{272}$$

потому что среди количеств $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ (97) может найтись несколько количеств $\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t, \ldots$, численно-равных рассматриваемому $\lambda^{(i)}$ $\lambda_r=\lambda_s=\lambda_t=\cdots=\lambda^{(i)}$. И в этом случае за число $e^{(i)}$ надо взять максимальный из показателей $e_r, e_s, e_t, \ldots$.

Следует, наконец, заметить, что в доказанной теореме IV''' имеется неполнота: *остается еще неизвестным, не может ли рассматриваемая кратность* $\varkappa_i$ *на деле превосходить указанный предел* $e^{(i)}$?

Принятая нами метода рассуждений не позволяет вывести это заключение.

§ 23. До сих пор (см. § 9) мы предполагали, что определитель $|A|$ линейной подстановки A *отличен от нуля*

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

т. е. что среди корней векового уравнения (1)

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k \tag{26}$$

нет равных нулю.

Теперь нам нужно освободиться от этого ограничения.

С этой целью введем сначала вспомогательную матрицу A^*

$$A^* = \begin{Vmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & a^*_{13} & \dots & a^*_{1k} \\ a^*_{21} & a^*_{22} & a^*_{23} & \dots & a^*_{2k} \\ a^*_{31} & a^*_{32} & a^*_{33} & \dots & a^*_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^*_{k1} & a^*_{k2} & a^*_{k3} & \dots & a^*_{kk} \end{Vmatrix} \qquad (273)$$

элементы которой определены следующими условиями:

$$\left. \begin{aligned} a^*_{ij} &= a_{ij}, \text{ если } i \neq j \\ a^*_{ii} &= a_{ii} + \varepsilon \end{aligned} \right\} \qquad (274)$$

где ε есть какая нибудь постоянная.[1]

Следовательно, в этих условиях, вспомогательная матрица A^* напишется в виде

$$A^* = \begin{Vmatrix} a_{11}+\varepsilon & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22}+\varepsilon & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\varepsilon & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kk}+\varepsilon \end{Vmatrix} \qquad (275)$$

откуда мы и заключаем, что *вековое уравнение* $\Delta^*(\lambda) = 0$, *соответствующее матрице* A^*, *имеет своими корнями количества*

$$\lambda_1 + \varepsilon, \ \lambda_2 + \varepsilon, \ \lambda_3 + \varepsilon, \ \dots, \ \lambda_k + \varepsilon. \qquad (276)$$

Иначе говоря, конфигурация всех корней, как вещественных, так и мнимых, векового уравнения $\Delta^*(\lambda) = 0$ будет той же самой, что и у данного векового уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ (1), но только она смещена вся целиком на ε. Поэтому, всегда можно выбрать постоянную ε таким образом, чтобы

[1] Здесь знаком звездочки * над матрицей мы уже не обозначаем действия приведения матрицы, как это делали ранее.

среди чисел (276) уже не оказалось ни одного равного нулю. Таким мы и делаем теперь выбор постоянной ε.

Возьмем теперь пространство $\mathcal{E}$ k-измерений и в нем какую-нибудь точку $P(a, b, c, \ldots, f)$. Пусть алгебраические уравнения, составляемые методою акад. А. Н. Крылова для точки P, будут: для матрицы A

$$D(\lambda)=0 \tag{V*}$$

и для матрицы A^*

$$D^*(\lambda)=0. \tag{V*}$$

Мы хотим теперь доказать, что *оба этих алгебраических уравнения не только будут одной и той же самой степени относительно неизвестной λ, но и вся конфигурация корней одного уравнения (приняв при этом во внимание и их кратность) является конфигурацией всех корней другого уравнения, смещенной на постоянную* ε.

Для доказательства возьмем вектор OP, который мы будем рассматривать как начальный и который мы будем писать безразлично: или в виде $V(a, b, c, \ldots, f)$, или в виде $V^*(a^*, b^*, c^*, \ldots, f^*)$, полагая $a^*=a$, $b^*=b$, $c^*=c$, $\ldots$, $f^*=f$.

Пусть теперь две бесконечных последовательности векторов

$$V,\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ \ldots,\ V_p,\ \ldots \tag{277}$$

и

$$V,\ V_1^*,\ V_2^*,\ V_3^*,\ \ldots,\ V_p^*,\ \ldots \tag{278}$$

образованы повторным применением к начальному вектору V: первая (277) — подстановки A', вторая (278) — подстановки $A^{*\prime}$. Здесь мы обозначаем компоненты вектора V_p через $a_p, b_p, c_p, \ldots, f_p$ и, соответственно, компоненты вектора V_p^* через $a_p^*, b_p^*, c_p^*, \ldots, f_p^*$.

Нашей ближайшей целью является установление взаимоотношений векторов V_p и V_p^*.

Мы знаем (см. § 5 нашей цитированной статьи), что компоненты векторов V_{p+1} и V_p связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned}
a_{p+1} &= a_{11}a_p + a_{21}b_p + a_{31}c_p + \cdots + a_{k1}f_p \\
b_{p+1} &= a_{12}a_p + a_{22}b_p + a_{32}c_p + \cdots + a_{k2}f_p \\
c_{p+1} &= a_{13}a_p + a_{23}b_p + a_{33}c_p + \cdots + a_{k3}f_p \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_{p+1} &= a_{1k}a_p + a_{2k}b_p + a_{3k}c_p + \cdots + a_{kk}f_p
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Аналогично, компоненты векторов V^*_{p+1} и V_p^* связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned} a^*_{p+1} &= a^*_{11}a_p^* + a^*_{21}b_p^* + a^*_{31}c_p^* + \cdots + a^*_{k1}f_p^* \\ b^*_{p+1} &= a^*_{12}a_p^* + a^*_{22}b_p^* + a^*_{32}c_p^* + \cdots + a^*_{k2}f_p^* \\ c^*_{p+1} &= a^*_{13}a_p^* + a^*_{23}b_p^* + a^*_{33}c_p^* + \cdots + a^*_{k3}f_p^* \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^*_{p+1} &= a^*_{1k}a_p^* + a^*_{2k}b_p^* + a^*_{3k}c_p^* + \cdots + a^*_{kk}f_p^* \end{aligned}\right\} \qquad (279)$$

которые, в силу равенств (274), пишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} a^*_{p+1} &= a_{11}a_p^* + a_{21}b_p^* + a_{31}c_p^* + \cdots + a_{k1}f_p^* + \varepsilon a_p^* \\ b^*_{p+1} &= a_{12}a_p^* + a_{22}b_p^* + a_{32}c_p^* + \cdots + a_{k2}f_p^* + \varepsilon b_p^* \\ c^*_{p+1} &= a_{13}a_p^* + a_{23}b_p^* + a_{33}c_p^* + \cdots + a_{k3}f_p^* + \varepsilon c_p^* \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^*_{p+1} &= a_{1k}a_p^* + a_{2k}b_p^* + a_{3k}c_p^* + \cdots + a_{kk}f_p^* + \varepsilon f_p^* \end{aligned}\right\}. \qquad (280)$$

Из равенств (280) мы заключаем, что *при* $p = 0$ *мы имеем векторное равенство* $V_1^* = V_1 + \varepsilon V$.

Предположим, что мы имеем доказанными векторные равенства

$$\left.\begin{aligned} V^* &= V \\ V_1^* &= V_1 + \varepsilon V \\ V_2^* &= V_2 + 2\varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_p^* &= V_p + C_p^1 \varepsilon V_{p-1} + \cdots + C_p^i \varepsilon^i V_{p-i} + \cdots + \varepsilon^p V \end{aligned}\right\} \qquad (281)$$

и докажем, что справедливым будет и векторное равенство

$$\begin{aligned} V^*_{p+1} = V_{p+1} + C^1_{p+1}\varepsilon V_p + \cdots \\ + C^i_{p+1}\varepsilon^i V_{p+1-i} + \cdots + \varepsilon^{p+1} V. \end{aligned} \qquad (282)$$

В самом деле, последнее из векторных равенств (281) влечет систему равенств в обыкновенных количествах

$$\left.\begin{aligned} a_p^* &= a_p + C_p^1 \varepsilon a_{p-1} + \cdots + C_p^i \varepsilon^i a_{p-i} + \cdots + \varepsilon^p a \\ b_p^* &= b_p + C_p^1 \varepsilon b_{p-1} + \cdots + C_p^i \varepsilon^i b_{p-i} + \cdots + \varepsilon^p b \\ c_p^* &= c_p + C_p^1 \varepsilon c_{p-1} + \cdots + C_p^i \varepsilon^i c_{p-i} + \cdots + \varepsilon^p c \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_p^* &= f_p + C_p^1 \varepsilon f_{p-1} + \cdots + C_p^i \varepsilon^i f_{p-i} + \cdots + \varepsilon^p f \end{aligned}\right\}. \qquad (283)$$

Подставив левые части равенств (283) в правые части равенств (280), мы получаем сначала

$$a^*_{p+1} = a_{p+1} + C_p^1 \varepsilon a_p + \cdots + C_p^i \varepsilon^i a_{p+1-i} + \cdots + \varepsilon^p a_1 +$$
$$+ \varepsilon a_p + \cdots + C_p^{i-1} \varepsilon^i a_{p-i+1} + \cdots + C_p^{p-1} \varepsilon^p a_1 + \varepsilon^{p+1} a$$

что̀ можно написать, очевидно, в виде

$$\begin{aligned} a^*_{p+1} = a_{p+1} + C^1_{p+1} \varepsilon a_p + \cdots + C^i_{p+1} \varepsilon^i a_{p+1-i} + \cdots \\ + C^p_{p+1} \varepsilon^p a_1 + \varepsilon^{p+1} a, \end{aligned} \qquad (284)$$

так как имеем

$$C_p^i + C_p^{i-1} = C^i_{p+1}.$$

Аналогично затем получаем

$$\left.\begin{aligned} b^*_{p+1} &= b_{p+1} + C^1_{p+1} \varepsilon b_p + \cdots + C^i_{p+1} \varepsilon^i b_{p+1-i} + \cdots + \varepsilon^{p+1} b \\ c^*_{p+1} &= c_{p+1} + C^1_{p+1} \varepsilon c_p + \cdots + C^i_{p+1} \varepsilon^i c_{p+1-i} + \cdots + \varepsilon^{p+1} c \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^*_{p+1} &= f_{p+1} + C^1_{p+1} \varepsilon f_p + \cdots + C^i_{p+1} \varepsilon^i f_{p+1-i} + \cdots + \varepsilon^{p+1} f \end{aligned}\right\}. \qquad (285)$$

Но равенства (284) и (285) в обыкновенных количествах равносильны, очевидно, одному векторному равенству (282), которое, следовательно, становится доказанным. Отсюда следует, что система векторных равенств (281) справедлива для любого p (ч. т. д.).

Установив это, предположим, что в бесконечной последовательности векторов (278) вектор V_μ^* есть первый, зависящий от предыдущих

$$V_\mu^* = g^* V^* + g_1^* V_1^* + g_2^* V_2^* + \cdots + g^*_{\mu-1} V^*_{\mu-1}. \qquad (286)$$

где g_i^* суть обыкновенные численные постоянные, могущие, в частности, быть все равными нулю.

Умножая первые μ векторных равенств (281) соответственно на $g^*, g_1^*, g_2^*, \ldots, g^*_{\mu-1}$, складывая и приравнивая, в силу (286), $(\mu+1)$-ому векторному равенству системы (281), мы, очевидно, получим векторное равенство

$$V_\mu = gV + g_1 V_1 + g_2 V_2 + \cdots + g_{\mu-1} V_{\mu-1}, \tag{287}$$

где g_i суть обыкновенные численные постоянные, для вычисления которых имеем формулы

$$\left.\begin{aligned}
g &= g^* + \varepsilon g_1^* + \varepsilon^2 g_2^* + \cdots + \varepsilon^{\mu-2} g^*_{\mu-2} + \varepsilon^{\mu-1} g^*_{\mu-1} - \varepsilon^\mu \\
g_1 &= g_1^* + C_2^1 \varepsilon g_2^* + \cdots + C^1_{\mu-2} \varepsilon^{\mu-3} g^*_{\mu-2} + C^1_{\mu-1} \varepsilon^{\mu-2} g^*_{\mu-1} - C_\mu^1 \varepsilon^{\mu-1} \\
g_2 &= g_2^* + \cdots + C^2_{\mu-2} \varepsilon^{\mu-4} g^*_{\mu-2} + C^2_{\mu-1} \varepsilon^{\mu-3} g^*_{\mu-1} - C_\mu^2 \varepsilon^{\mu-2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
g_{\mu-2} &= g^*_{\mu-2} + C^{\mu-2}_{\mu-1} \varepsilon g^*_{\mu-1} - C_\mu^{\mu-2} \varepsilon^2 \\
g_{\mu-1} &= g^*_{\mu-1} - C_\mu^{\mu-1} \varepsilon
\end{aligned}\right\}. \tag{288}$$

Так как переход от данной матрицы A к вспомогательной матрице A^* делается путем *прибавления* к диагональным элементам постоянной ε, и так как в формулы (288) не входят элементы матриц A и A^*, то эти формулы должны быть разрешаемы относительно количеств $g^*, g_1^*, g_2^*, \ldots, g^*_{\mu-1}$, причем новые формулы должны быть тождественны формулам (288) с тою лишь разницей, что постоянное ε должно быть заменено на $-\varepsilon$:

$$\left.\begin{aligned}
g^* &= g + (-\varepsilon) g_1 + (-\varepsilon)^2 g_2 + \cdots + (-\varepsilon)^{\mu-2} g_{\mu-2} + (-\varepsilon)^{\mu-1} g_{\mu-1} + \\
&\qquad + (-\varepsilon)^\mu \\
g_1^* &= g_1 + C_2^1 (-\varepsilon) g_2 + \cdots + C^1_{\mu-2} (-\varepsilon)^{\mu-3} g_{\mu-2} + C^1_{\mu-1} (-\varepsilon)^{\mu-2} g_{\mu-1} - \\
&\qquad - C_\mu^1 (-\varepsilon)^{\mu-1} \\
g_2^* &= g_2 + \cdots + C_{\mu-2} (-\varepsilon)^{\mu-4} g_{\mu-2} + C^2_{\mu-1} (-\varepsilon)^{\mu-3} g_{\mu-1} - \\
&\qquad - C_\mu^2 (-\varepsilon)^{\mu-2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
g^*_{\mu-2} &= g_{\mu-2} + C^{\mu-2}_{\mu-1} (-\varepsilon) g_{\mu-1} - C_\mu^{\mu-2} (-\varepsilon)^2 \\
g^*_{\mu-1} &= g_{\mu-1} - C_\mu^{\mu-1} (-\varepsilon)
\end{aligned}\right\}. \tag{289}$$

Формулы (286) и (287) показывают, что вектора обоих бесконечных последовательностей векторов (277) и (278) обладают тем важным свойством, что если какой-нибудь вектор одной последовательности является линейной комбинацией предыдущих векторов этой последовательности, то соответствующий (т. е. с тем же самым индексом) вектор другой последовательности так же есть линейная комбинация предшествующих векторов, причем коэффициенты g_i^* и g_i обеих линейных комбинаций (286) и (287) связаны между собою симметричными соотношениями (288) и (289).

Установив это, возвратимся к нашей основной задаче отыскания взаимоотношения корней обоих алгебраических уравнений $D(\lambda)=0$ (V*) и $D^*(\lambda)=0$ (V*), составленных по методе акад. А. Н. Крылова для точки $P(a, b, c, \ldots, f)$ и, соответственно, для матриц A' и $A^{*\prime}$.

Мы уже знаем, что в таком случае оба эти алгебраические уравнения возникают *формальным образом* из соответственных векторных соотношений (287) и (286) путем замены векторов V_i и V_i^* на i-ую степень λ^i неизвестной λ, вектора же $V=V^*$ заменяются просто единицею.

Поэтому, уравнение $D(\lambda)=0$ (V*) напишется в виде

$$\lambda^\mu - g_{\mu-1}\lambda^{\mu-1} - g_{\mu-2}\lambda^{\mu-2} - \cdots - g_2\lambda^2 - g_1\lambda - g = 0. \quad (290)$$

и уравнение $D^*(\lambda)=0$ (V*) имеет вид

$$\lambda^\mu - g^*_{\mu-1}\lambda^{\mu-1} - g^*_{\mu-2}\lambda^{\mu-2} - \cdots - g_2^*\lambda^2 - g_1^*\lambda - g^* = 0. \quad (291)$$

Заменив теперь в уравнении (291) неизвестную λ на $\lambda+\varepsilon$, мы выводим из этого уравнения другое:

$$\begin{gathered}(\lambda+\varepsilon)^\mu - g^*_{\mu-1}(\lambda+\varepsilon)^{\mu-1} - g^*_{\mu-2}(\lambda+\varepsilon)^{\mu-2} - \cdots \\ - g_2^*(\lambda+\varepsilon)^2 - g_1^*(\lambda+\varepsilon) - g^* = 0\end{gathered} \quad (292)$$

корнями λ которого будут, очевидно, служить все корни первоначального уравнения (291), уменьшенные на ε.

Но если мы расположим уравнение (292) по убывающим степеням буквы λ, то немедленно заметим, что, в силу равенств (288), его коэффициенты при степенях $\lambda^{\mu-1}$, $\lambda^{\mu-2}$, ... будут как раз количества $g_{\mu-1}$, $g_{\mu-2}$, ... Таким образом, уравнение (292) тождественно с уравне-

нием (290) и, значит, *вся конфигурация корней рассматриваемого уравнения*

$$D(\lambda)=0 \qquad \text{(V)}$$

тождественна с конфигурацией корней уравнения

$$D^*(\lambda)=0 \qquad \text{(V*)}$$

смещенной на $-\varepsilon$. А это и требовалось обнаружить. (Ч. т. д.).

§ **24.** Установленный факт важен для суждения о самих корнях уравнения $D(\lambda)=0$ (V*). В самом деле, в силу указанного выбора постоянной ε, определитель $|A^*|$ матрицы A^* *отличен от нуля*. Это же обстоятельство означает, что, построив в пространстве $\mathcal{E}$ систему всех характеристических многообразий для матрицы $A^{*\prime}$, мы на основании всего, что было сказано о случаях I, II и III, имеем ясное представление о корнях уравнения $D^*(\lambda)=0$ (V*) и, значит, сместив их конфигурацию на $-\varepsilon$, имеем полное знание и корней рассматриваемого уравнения $D(\lambda)=0$ (V*).

Прибегать к вспомогательному уравнению $D^*(\lambda)=0$ (V*) приходится потому, что прямое изучение уравнения $D(\lambda)=0$ (V*) представляет трудности. Действительно, определитель $|A^*|$ матрицы A^* отличен от нуля и, значит, при изучении корней вспомогательного уравнения $D^*(\lambda)=0$ (V*) мы можем пользоваться — как надежным инструментом — той совокупностью характеристических многообразий, которая имеется нанесенной в пространстве $\mathcal{E}$ для матрицы $A^{*\prime}$.

Но в случае уравнения $D(\lambda)=0$ (V*) этот инструмент уже ускользает от нас, так как определитель $|A|$ равен нулю и говорить о характеристических многообразиях, в собственном смысле, для матрицы A' в пространстве $\mathcal{E}$ теперь не приходится.

Дабы убедиться в этом, достаточно заметить, что раз определитель $|A|$ подстановки A' равен нулю, то самая эта подстановка

$$\left.\begin{array}{l} y_1=a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3+\cdots+a_{k1}x_k \\ y_2=a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3+\cdots+a_{k2}x_k \\ y_3=a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3+\cdots+a_{k3}x_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_k=a_{1k}x_1+a_{2k}x_2+a_{3k}x_3+\cdots+a_{kk}x_k \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{A}')$$

уже не преобразует пространства $\mathcal{E}$ само в себя, но лишь в *часть его.* В самом деле, вследствие того, что определитель $|A|$ равен нулю

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \ldots & a_{k2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots & a_{k3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} = 0$$

имеем между его строками линейную зависимость. Следовательно, переменные $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$ должны быть связаны между собою наличием линейных соотношений — одного или нескольких, смотря по рангу r определителя $|A|$ —, вида

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3 + \cdots + \alpha_{1k} y_k = 0 \\ \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \alpha_{23} y_3 + \cdots + \alpha_{2k} y_k = 0 \\ \alpha_{31} y_1 + \alpha_{32} y_2 + \alpha_{33} y_3 + \cdots + \alpha_{3k} y_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{k-r,1} y_1 + \alpha_{k-r,2} y_2 + \alpha_{k-r,3} y_3 + \cdots + \alpha_{k-r,k} y_k = 0 \end{array}\right\} \qquad (293)$$

и, значит, заставляя точку $P(x_1, x_2, x_2, \ldots, x_k)$ пробегать *все* пространство $\mathcal{E}$, мы заставляем точку $Q(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k)$ перемещаться лишь *в его части*, определяемой соотношениями (293).

Таким образом, уже само пространство $\mathcal{E}$ не есть в этом случае характеристическое и, следовательно, нельзя в рассматриваемом случае говорить о характеристических многообразиях в прежнем смысле.

Однако, это становится возможным в следующем *условном смысле.*

Для этого докажем сначала, что *всякое характеристическое многообразие для матрицы* $A^{*\prime}$

$$A^{*\prime} = \left\| \begin{array}{ccccc} a_{11} + \varepsilon & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} + \varepsilon & a_{32} & \ldots & a_{k2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} + \varepsilon & \ldots & a_{k3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} & \ldots & a_{kk} + \varepsilon \end{array} \right\| \qquad (294)$$

остается неизменным при изменении величины ε.

Для доказательства дадим величине ε какое-нибудь другое значение, напр. ε_1, где $\varepsilon_1 \neq \varepsilon$. Обозначим через $A_1^{*\prime}$ матрицу, соответствующую величине ε_1

$$A_1^{*\prime} = \left\| \begin{matrix} a_{11}+\varepsilon_1 & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22}+\varepsilon_1 & a_{32} & \ldots & a_{k2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}+\varepsilon_1 & \ldots & a_{k3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} & \ldots & a_{kk}+\varepsilon_1 \end{matrix} \right\|. \quad (295)$$

Мы предполагаем, что определители $|A^{*\prime}|$ и $|A_1^{*\prime}|$, соответствующие этим матрицам, оба отличны от нуля. Пусть H есть какое-нибудь характеристическое многообразие для матрицы $A^{*\prime}$. Пусть $V (= OP)$ есть какой-нибудь вектор, лежащий в H и пусть V_1 и V_1^* будут преобразования его соответственно матрицам $A^{*\prime}$ и $A_1^{*\prime}$. Так как многообразие H есть характеристическое для матрицы $A^{*\prime}$, вектор V_1 лежит в H.

Но в силу первой формулы векторных равенств (281) имеем

$$V_1^* = V_1 + \varepsilon V.$$

И так как вектор εV, очевидно, также принадлежит многообразию H, то вектор V_1^* принадлежит многообразию H. А это и доказывает, что многообразие H есть характеристическое и для подстановки $A_1^{*\prime}$.

Таким образом, *характеристические многообразия обеих подстановок $A^{*\prime}$ и $A_1^{*\prime}$ тождественны.*[1] (Ч. т. д.).

[1] Нелишне, может быть, привести *аналитическое* доказательство этого же предложения, выясняющее вопрос с других сторон. Многообразие H, как всякое евклидово многообразие, определяется системою линейных совместных и независимых уравнений, которым должны удовлетворять координаты всех его (и только его) точек:

$$L_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) = 0, \quad L_2 = 0, \ldots, L_\chi = 0. \quad (296)$$

Тот же факт, что H есть характеристическое многообразие для $A^{*\prime}$, это равносильно требованию, чтобы линейные формы (296), при замене в них букв x соответственно буквами y, определенными подстановкою $A^{*\prime}$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = (a_{11}+\varepsilon)\, x_1 + a_{21} x_2 + \cdots + a_{k1} x_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = a_{1k} x_1 + a_{2k} x_2 + \cdots + (a_{kk}+\varepsilon)\, x_k \end{array} \right\} \quad (297)$$

Но раз все характеристические многообразия подстановки $A^{*\prime}$ остаются теми же самими, если мы изменяем число ε, лишь бы определитель $|A^{*\prime}|$ этой подстановки все время отличался от нуля, то *мы можем условно считать их сохраняющимися и для* $\varepsilon = 0$, и продолжать называть их *характеристическими многообразиями для данной подстановки* A, *имеющей определитель равный нулю:* $|A| = 0$.

становились *линейными комбинациями* форм $L_i(x_1, \ldots, x_k)$, причем самые эти линейные комбинации должны быть независимыми между собою. Сказанное можно написать в виде символических уравнений

$$\left.\begin{array}{l} L_1(y) = h_{11} L_1(x) + h_{12} L_2(x) + \cdots + h_{1\varkappa} L_\varkappa(x) \\ L_2(y) = h_{21} L_1(x) + h_{22} L_2(x) + \cdots + h_{2\varkappa} L_\varkappa(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_k(y) = h_{\varkappa 1} L_1(x) + h_{\varkappa 2} L_2(x) + \cdots + h_{\varkappa\varkappa} L_\varkappa(x) \end{array}\right\} \qquad (298)$$

для которых численный определитель

$$\begin{vmatrix} h_{11} \cdots h_{1\varkappa} \\ \cdots\cdots\cdots \\ h_{\varkappa 1} \cdots h_{\varkappa\varkappa} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (299)$$

отличен от нуля.

Беря теперь подстановку $A_1^{*\prime}$ (295)

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y}_1 = (a_{11} + \varepsilon_1) x_1 + a_{21} x_2 + \cdots + a_{k1} x_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{y}_k = a_{1k} x_1 + a_{2k} x_2 + \cdots + (a_{kk} + \varepsilon_1) x_k \end{array}\right\} \qquad (300)$$

которую, очевидно, можно написать в виде

$$\bar{y}_1 = y_1 + (\varepsilon_1 - \varepsilon) x_1, \ \ \bar{y}_2 = y_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon) x_2, \ \ldots, \ \bar{y}_k = y_k + (\varepsilon_1 - \varepsilon) x_k \qquad (301)$$

мы немедленно усматриваем, что замена в формах (296) букв x соответственно буквами $\bar{y}$ приведет, в силу соотношений (298), к равенствам

$$\left.\begin{array}{l} L_1(\bar{y}) = (h_{11} + \varepsilon_1 - \varepsilon) L_1(x) + h_{12} L_2(x) + \cdots + h_{1\varkappa} L_\varkappa(x) \\ L_2(\bar{y}) = h_{12} L_1(x) + (h_{22} + \varepsilon_1 - \varepsilon) L_2(x) + \cdots + h_{2\varkappa} L_\varkappa(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_\varkappa(\bar{y}) = h_{1\varkappa} L_1(x) + h_{2\varkappa} L_2(x) + \cdots + (h_{\varkappa\varkappa} + \varepsilon_1 - \varepsilon) L_\varkappa(x) \end{array}\right\}. \qquad (302)$$

Если определитель системы (302), составленный из коэффициентов при формах $L_i(x)$, *отличен от нуля,* равенства (302) и выражают в точности то, что многообразие H есть характеристическое для подстановки $A_1^{*\prime}$ (295).

С другой стороны, прямой подсчет показывает, что *все корни определителя*

$$\begin{vmatrix} h_{11} - \lambda, & \ldots, & h_{1\varkappa} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{\varkappa 1}, & \ldots, & h_{\varkappa\varkappa} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

являются вместе с тем и корнями векового уравнения, определенного матрицей $A^{*\prime}$. Это замечание и оканчивает доказательство тождественности характеристических многообразий для обеих матриц $A^{*\prime}$ (294) и $A_1^{*\prime}$ (295). (Ч. т. д.).

В этом смысле можно говорить и о *характеристической прямой, модуль сдвига* λ *которой равен нулю*, $\lambda = 0$: это будет та характеристическая прямая подстановки $A^{*\prime}$, для которой модуль сдвига равен ε.

Если мы примем это условие, то все, что было найдено нами для случаев I, II и III, *остается в силе и тогда, когда определитель* $|A|$ *равен нулю.*

В частности, сохраняются *все теоремы* IV$'$, IV$''$ и IV$'''$ (стр. 743, 1076, 1080) *о случаях вырождения уравнения* $D(\lambda) = 0$ (V*).

Впрочем, можно сохранить и прежний смысл характеристического многообразия, но тогда нужно уже пожертвовать целостью пространства $\mathcal{E}$ и ограничиться рассмотрением лишь его части. Легко, в самом деле, доказать, что в пространстве $\mathcal{E}$ содержится максимальное характеристическое многообразие, — в прежнем смысле, — для подстановки A', и легко определить его геометрически.

В самом деле, пусть точка $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ пробегает все пространство $\mathcal{E}$. Тогда точка $Q(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ пробегает часть его, пусть $\mathcal{E}_1$. Если точка P пробегает $\mathcal{E}_1$, точка Q пробегает часть многообразия $\mathcal{E}_1$, пусть $\mathcal{E}_2$. Если точка P пробегает $\mathcal{E}_2$, точка Q пробегает часть многообразия $\mathcal{E}_2$, пусть $\mathcal{E}_3$, и *так далее.*

Ясно, что евклидовы многообразия

$$\mathcal{E} > \mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_3 > \cdots > \mathcal{E}_i > \cdots$$

идут, содержась одно в другом, каждое в предыдущих, и *убывая числом измерений.* Следовательно, имеется такое целое положительное σ, что многообразие $\mathcal{E}_{\sigma+1}$ *тождественно* с $\mathcal{E}_\sigma$.

Ясно, что подстановка A' преобразует $\mathcal{E}_\sigma$ само в себя и что это есть *максимальное* характеристическое многообразие в $\mathcal{E}$, в прежнем смысле. Ясно также, что все характеристические прямые L для подстановки A', соответствующие корням λ данного векового уравнения (1) отличным от нуля, содержатся все в многообразии $\mathcal{E}_\sigma$.

Ясно, наконец, что если мы поместим оси координат в многообразие $\mathcal{E}_\sigma$ в количестве, равном числу его измерений, то получим обыкновенную подстановку с определителем, отличным от нуля и, следовательно, будем иметь в многообразии $\mathcal{E}_\sigma$, рассматриваемом как целое пространство, только три случая: I, II и III.

ПРИМЕРЫ

Прежде чем перейти к примерам, следует указать на то, что в пространстве $\mathcal{E}$ никакая точка $P(a, b, c, \ldots, f)$ не является привилегирован-

ной, но, наоборот, все точки равноправны, потому что всегда возможно преобразовать пространство $\mathscr{E}$ само в себя так, чтобы любая его точка $P(a, b, c, \ldots, f)$ совпала с наперед заданной точкой $P_0(a^0, b^0, c^0, \ldots, f^0)$.

В частности, любую точку P пространства $\mathscr{E}$ можно преобразовать в точку

$$a=1,\ b=0,\ c=0,\ \ldots, f=0.$$

Для этого достаточно лишь провести через точку P координатную ось OX_1 и изменить надлежащим образом единицу масштаба.

Отсюда мы заключаем, что при выборе $a=1, b=0, c=0, \ldots, f=0$ за точку составления алгебраического уравнения $D(\lambda)=0$ (V*), мы не минуем ни одного исключительного случая, и что, таким образом, *все* случаи вырождения уравнения $D(\lambda)=0$ (V*) найдут в ней место.

Случай I: *все корни векового уравнения различны.*

Предложена система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} q_1' &= 3q_1 + q_2 - q_3 \\ q_2' &= -q_1 + 5q_2 + q_3 \ \ldots \\ q_3' &= -2q_1 + 2q_2 + 4q_3. \end{aligned}$$

Соответствующее вековое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda, & 1, & -1 \\ -1, & 5-\lambda, & 1 \\ -1, & 2, & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет своими корнями

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=6.$$

1. Случай вырождения корня.

Положив

$$x=q_1$$

получим последовательно

$$\begin{aligned} x &= q_1 \\ x' &= 3q_1 + q_2 - q_3 \\ x'' &= 10q_1 + 6q_2 - 6q_3. \end{aligned}$$

Переменные q_1, q_2, q_3 исключаются одновременно, и мы имеем

$$x'' - 6x' + 8x = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Его корни суть

$$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 4.$$

Корень $\lambda_3 = 6$ утрачен.

2. Случай вырождения другого корня.

Положив

$$x = q_2$$

получим последовательно

$$\begin{aligned} x &= q_2 \\ x' &= -q_1 + 5q_2 + q_3 \\ x'' &= -10q_1 + 26q_2 + 10q_3. \end{aligned}$$

Переменные q_1, q_2, q_3 исключаются одновременно, и мы имеем

$$x'' - 10x' + 24x = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0.$$

Его корни суть

$$\lambda_2 = 4, \ \lambda_3 = 6.$$

Корень $\lambda_1 = 2$ утрачен.

3. Случай вырождения двух корней одновременно.

Положив

$$x = q_1 + q_2 - q_3$$

получим последовательно

$$\begin{aligned} x &= q_1 + q_2 - q_3 \\ x' &= 4q_1 + 4q_2 - 4q_3. \end{aligned}$$

Переменные q_1, q_2, q_3 исключаются одновременно, и мы имеем

$$x' - 4x = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет:

$$\lambda - 4 = 0.$$

Корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_3 = 6$ утрачены.

4. Нормальный случай.

Положив

$$x = q_1 + q_2 + q_3$$

получим последовательно

$$\begin{aligned} x &= q_1 + q_2 + q_3 \\ x' &= 8q_2 + 4q_3 \\ x'' &= -16q_1 + 48q_2 + 24q_3 \\ x''' &= -144q_1 + 272q_2 + 160q_3. \end{aligned}$$

Переменные q_1, q_2, q_3 исключаются одновременно, и мы имеем

$$x''' - 12x'' + 44x' - 48x = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет:

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 44\lambda - 48 = 0.$$

Его корни суть

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 6.$$

Ни один корень не утрачен.

Объяснение к этому примеру.

В трехмерном пространстве $\mathcal{E}$ находятся *три* характеристические прямые L_1, L_2, L_3, соответствующие корням $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 6$ векового уравнения и определяемые лежащими на них векторами

$$V_1(1, -1, 1),\ V_2(1, 1, -1) \text{ и } V_3(-1, 1, 1).$$

Во всякой точке $P(a, b, c)$ характеристической плоскости π_1, проходящей чрез прямые L_2 и L_3, утрачивается корень $\lambda_1 = 2$; уравнение этой плоскости есть $z + x = 0$. Во всякой точке P характеристической плоскости π_2, проходящей через прямые L_1 и L_3, утрачивается корень $\lambda_2 = 4$; уравнение этой плоскости есть $x + y = 0$. Во всякой точке P характеристической плоскости π_3, проходящей через прямые L_1 и L_2, утрачивается корень $\lambda_3 = 6$; уравнение этой плоскости есть $y + z = 0$.

Вне этих характеристических плоскостей нет утраты ни одного корня. Выбор $x = q_1$ сделан точкой $P(1, 0, 0)$, лежащей на π_3; выбор $x = q_2$ сделан точкой $P(0, 1, 0)$, лежащей на π_1; выбор $x = q_1 + q_2 - q_3$ сделан точкой $P(1, 1, -1)$, лежащей на прямой L_2, т. е. одновременно на плоскостях π_1 и π_3; наконец, выбор $x = q_1 + q_2 + q_3$ сделан точкой $P(1, 1, 1)$, лежащей вне плоскостей π_1, π_2, π_3; в этой последней точке *перемещающий множитель* $M(1, 1, 1) = +64$, и, значит, *отличен от нуля.*

Случай II: *вековое уравнение допускает кратные корни, но перемещающий множитель не тождественен нулю.*

Предложена система дифференциальных уравнений *

$$\begin{aligned} q_1' &= 4q_1 + q_2 - q_3 \\ q_2' &= -6q_1 - q_2 + 2q_3 \\ q_3' &= 2q_1 + q_2 + q_3. \end{aligned}$$

Соответствующее вековое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda, & 1, & -1 \\ -6, & -1-\lambda, & 2 \\ 2, & 1, & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет один двойной корень

$$\lambda_1 = 1$$

и один простой корень

$$\lambda_2 = 2.$$

1. Случай вырождения кратности, но не корней.

Положив

$$x = q_1 + q_2 + q_3$$

получим последовательно

$$\begin{aligned} x &= q_1 + q_2 + q_3 \\ x' &= q_2 + 2q_3 \\ x'' &= -2q_1 + q_2 + 4q_3. \end{aligned}$$

* См. страницу 953 нашей цитированной статьи.

Переменные q_1, q_2, q_3 исключаются одновременно, и мы имеем

$$x'' - 3x' + 2x = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Его корни суть

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2.$$

Ни один корень не утрачен, но потеряна кратность у корня $\lambda_1 = 1$, который был двойным.

2. Случай вырождения корня, но не кратности.

Положив

$$x = 2q_1 + q_2 + q_3$$

получим последовательно

$$\begin{aligned} x &= 2q_1 + q_2 + q_3 \\ x' &= 4q_1 + 2q_2 + q_3 \\ x'' &= 6q_1 + 3q_2 + q_3. \end{aligned}$$

Переменные q_1, q_2, q_3 исключаются одновременно, и мы имеем

$$x'' - 2x' + x = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Его двойной корень есть

$$\lambda_1 = 1.$$

Утрачен корень $\lambda_2 = 2$, но сохранена кратность корня $\lambda_1 = 1$.

3. Случай вырождения и кратности и корня.

Положив

$$x = 2q_1 + q_2,$$

получим последовательно

$$\begin{aligned} x &= 2q_1 + q_2 \\ x' &= 2q_1 + q_2. \end{aligned}$$

Значит

$$x' - x = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет:

$$\lambda - 1 = 0.$$

Утрачен совсем корень $\lambda_2 = 2$ и понижена кратность корня $\lambda_1 = 1$, бывшего двойным.

4. Нормальный случай.

Положив

$$x = q_1$$

получим последовательно

$$\begin{aligned} x &= q_1 \\ x' &= 4q_1 + q_2 - q_3 \\ x'' &= 8q_1 + 2q_2 - 3q_3 \\ x''' &= 14q_1 + 3q_2 - 7q_3. \end{aligned}$$

Переменные q_1, q_2, q_3 исключаются одновременно, и мы имеем

$$x''' - 4x'' + 5x' - 2x = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$$

Его корни суть:

$$\lambda_1 = 1 \text{ двойной}, \quad \lambda_2 = 2 \text{ простой}.$$

Не утрачены ни корни, ни кратность.

Объяснение к этому примеру

В трехмерном пространстве $\mathcal{E}$ находятся *две* характеристические прямые L_1 и L_2, соответствующие корням $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$, и определяемые соответственно лежащими на них векторами

$$V_1(2, 1, 0) \text{ и } V_2(1, 0, -1).$$

В этом же пространстве $\mathcal{E}$ имеются *две* характеристические плоскости: *одна из них*, π_1, проходит чрез прямые L_1 и L_2 и имеет своим уравнением $x - 2y + z = 0$, на ней утрачивается кратность корня $\lambda_1 = 1$; *другая из них*, π_2, проходит чрез прямую L_1, на ней утрачивается корень $\lambda_2 = 2$; ее уравнение есть $x - 2y = 0$.

Вне плоскости π_1 и π_2 нет утраты ни корней, ни кратности.

Выбор $x = q_1 + q_2 + q_3$ сделан точкой $P(1, 1, 1)$, лежащей на π_1; выбор $x = 2q_1 + q_2 + q_3$ сделан точкой $P(2, 1, 1)$, лежащей на π_2; выбор $x = 2q_1 + q_2$ сделан точкой $P(2, 1, 0)$, лежащей на прямой L_1, т. е. одновременно на плоскостях π_1 и π_2; наконец, выбор $x = q_1$ сделан точкой $P(1, 0, 0)$ лежащей вне плоскостей π_1 и π_2; в этой последней точке *перемещающий множитель* $M(1, 0, 0) = +1$ и, значит, *отличен от нуля.*

Случай III: *вековое уравнение имеет перемещающий множитель тождественным нулю.*

В этом случае непременно должна произойти либо утрата корней, либо утрата кратности. Следовательно, «*нормальным*» здесь следует назвать тот случай, когда сохранены все корни и когда удержана максимально — возможная кратность.

Пример акад. Л. И. Мандельштама

Предлагается система дифференциальных уравнений

$$q_1' = 2q_1 + q_2 + q_3$$
$$q_2' = q_1 + 2q_2 + q_3$$
$$q_3' = q_1 + q_2 + 2q_3.$$

Соответствующее вековое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda, & 1, & 1, \\ 1, & 2-\lambda, & 1, \\ 1, & 1, & 2-\lambda, \end{vmatrix} = 0$$

имеет один двойной корень

$$\lambda_1 = 1$$

и один простой корень

$$\lambda_2 = 4.$$

Картина, соответствующая этому примеру, будет следующей. В трехмерном пространстве $\mathcal{E}$ имеется единственная характеристическая прямая L, соответствующая простому корню $\lambda_2 = 4$ и определяемая вектором

$$V(1, 1, 1).$$

Что же касается до характеристических прямых, соответствующих двойному корню $\lambda_1 = 1$, то их бесчисленное множество; их совокупность образует плоскость π, уравнение которой есть

$$x + y + z = 0.$$

Всякая плоскость, проходящая чрез прямую L, будет характеристической.

Поэтому, если точка $P(a, b, c)$ будет взята на прямой L, то произойдет полная утрата корня $\lambda_2 = 1$, и мы будем иметь единственным корнем $\lambda_2 = 4$. Если точка P будет взята на плоскости π, то будет утрачен корень $\lambda_2 = 4$, и мы сохраним лишь простой корень $\lambda_1 = 1$.

Если же точка P будет взята вне прямой L и вне плоскости π, то мы будем иметь квадратное уравнение с простыми корнями $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 4$.

Действительно, делая выбор (*на прямой* L)

$$x = q_1 + q_2 + q_2$$

мы имеем

$$x' = 4q_1 + 4q_2 + 4q_3$$

и, следовательно, имеем:

$$x' - 4x = 0$$

и

$$\lambda - 4 = 0.$$

Делая выбор (*на плоскости* π)

$$x = q_1 - q_3$$

имеем

$$x' = q_1 - q_3$$

и, значит, имеем:

$$x' - x = 0$$

и

$$\lambda - 1 = 0.$$

Делая выбор (*нормальный случай*)

$$x = q_1$$

имеем последовательно

$$\begin{aligned} x &= q_1 \\ x' &= 2q_1 + q_2 + q_3 \\ x'' &= 6q_1 + 5q_2 + 5q_3. \end{aligned}$$

Переменные q_1, q_2, q_3 исключаются одновременно, и мы имеем

$$x'' - 5x' + 4x = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Оно имеет простыми корнями

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4.$$

Следовательно, корни не утрачены, но утрачена лишь кратность.

Пример акад. А. Н. Крылова

Предлагается система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} q_1' &= 5q_1 + 30q_2 - 48q_3 \\ q_2' &= 3q_1 + 14q_2 - 24q_3 \\ q_3' &= 3q_1 + 15q_2 - 25q_3. \end{aligned}$$

Соответствующее вековое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda, & 30, & -48 \\ 3, & 14-\lambda, & -24 \\ 3, & 15, & -25-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет один двойной корень

$$\lambda_1 = -1$$

и один простой корень

$$\lambda_{II} = -4.$$

Пространственная картина будет для этого примера та же самая, что и для примера акад. Л. И. Мандельштама, с тою лишь разницей, что вектором V, лежащим на характеристической прямой L, соответствующей простому корню -4, будет

$$V(1,\ 5,\ -8)$$

и уравнением плоскости π будет

$$2x + y + z = 0.$$

Выбирая (*на прямой* L)

$$x = q_1 + 5q_2 - 8q_3$$

имеем

$$x' = -4q_1 - 20q_2 + 32q_3, \quad x' + 4x = 0, \quad \lambda + 4 = 0.$$

Выбирая (*на плоскости* π)

$$x = q_2 - q_3$$

имеем

$$x' = -q_2 + q_3, \quad x' + x = 0, \quad \lambda + 1 = 0.$$

Выбирая (*нормальный случай*)

$$x = q_1$$

имеем последовательно

$$\begin{aligned} x &= q_1 \\ x' &= 5q_1 + 30q_2 - 48q_3 \\ x'' &= 29q_1 - 150q_2 + 240q_3. \end{aligned}$$

Исключение переменных q_1, q_2, q_3 дает

$$x'' + 5x' + 4x = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0.$$

Его корни суть

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -4.$$

Не утрачен ни один корень, но лишь кратность.

В предыдущих примерах мы сосредоточили внимание на случаях вырождения потому, что для практики крайне важно сводить решение уравнений высоких степеней к уравнениям более низких степеней, каковыми и являются случаи вырождения.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВИХРЕВЫХ ДОРОГ КАРМАНА

В. В. ГОЛУБЕВА

(*Представлено академиком* С. А. Чаплыгиным)

Как известно, Карманом и Н. Е. Жуковским были получены различные условия устойчивости вихревых дорог Кармана (Wirbelstrasse). Если назвать через l расстояние между двумя последовательными вихрями одной стороны вихревой дороги и через h ширину дороги, то условия устойчивости при шахматном расположении вихрей по Карману и Жуковскому имеют вид[1] по Карману:

$$ch\frac{\pi h}{l}=\sqrt{2},$$

откуда

$$\frac{h}{l}=0.281,$$

по Н. Е. Жуковскому:

$$ch\frac{\pi h}{l}=\sqrt{3},$$

откуда

$$\frac{h}{l}=0.365.$$

Причину этого противоречия Н. И. Ахиезер пытался объяснить тем, что условие Жуковского предполагает определенный закон смещения вихрей, представляющий собою частный случай более общего закона смещения, рассматриваемого Карманом, причем Н. И. Ахиезер строго доказал, что, вопреки указанию Н. Е. Жуковского, из рассматриваемых им смещений вихрей нельзя получить смещений общего вида, рассматриваемых Карманом.[2] Однако, при этом нужно было бы ожидать, что условие Кармана

[1] См. напр., В. В. Голубев. Теория крыла конечного размаха. Тр. ЦАГИ, 1931, гл. I; H. Villat. Leçons sur la théorie des tourbillons. Ch. IV.

[2] Н. И. Ахиезер. К вопросу об устойчивости вихревых улиц. Математ. сборн. XXXIV, 1927, стр. 1—8.

содержит условие Н. Е. Жуковского как частный случай, а не противоречит ему. В действительности причина этого противоречия кроется более глубоко; выяснению его и посвящена настоящая заметка.

Вопрос о движении вихрей, образующих вихревую дорогу Karman'а, приводится к интегрированию системы линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных функций. Как показал Карман, задача чрезвычайно упрощается, если искать интегралы системы, следующие некоторому периодическому закону.

Пусть вихри расположены таким образом, что вихри верхнего ряда находятся в точках

$$z_m = -\frac{l}{2} + \frac{h}{2} i + lm = z_0 + lm,$$

а вихри нижнего ряда в точках $-z_0 + ln$, где m и n целые числа. Называя смещения по осям вихрей верхнего ряда через x_m и y_m и нижнего ряда x'_n, y'_n и полагая

$$x_m = re^{m\varphi i}; \; y_m = r_1 e^{m\varphi i}; \; x'_n = r' e^{n\varphi i}; \; y'_n = r_1 e^{n\varphi i}, \tag{1}$$

получим для функций r, r_1, r', r_1' в случае шахматного расположения уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi l^2}{\Gamma}\frac{dr}{dt} &= -Ar_1 - Br' - Cr_1'; & \frac{2\pi l^2}{\Gamma}\frac{dr'}{dt} &= A_1 r_1' - B_1 r + C_1 r_1 \\ \frac{2\pi l^2}{\Gamma}\frac{dr_1}{dt} &= -Ar - Cr' + Br_1'; & \frac{2\pi l^2}{\Gamma}\frac{dr_1'}{dt} &= A_1 r' + C_1 r + B_1 r_1, \end{aligned} \tag{2}$$

где Γ интенсивность вихрей;

$$A = \Sigma' \frac{1}{m^2} - \Sigma' \frac{e^{m\varphi i}}{m^2} - \Sigma \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - k^2}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + k^2\right]^2}$$

$$B = \Sigma \frac{(2n+1)k}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + k^2\right]^2} e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi} \tag{3}$$

$$C = \Sigma \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - k^2}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + k^2\right]^2} e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}$$

$$A_1 = \Sigma' \frac{1}{n^2} - \Sigma' \frac{e^{n\varphi i}}{n^2} - \Sigma \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 - k^2}{\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + k^2\right]^2}$$

$$B_1 = \Sigma \frac{(2m+1)k}{\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + k^2\right]^2} e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)\varphi} \tag{4}$$

$$C_1 = \Sigma \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 - k^2}{\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + k^2\right]^2} e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)\varphi},$$

где

$$k = \frac{h}{l},$$

и в суммах Σ' отсутствуют члены, соответствующие $m=0$ или $n=0$. Заметим, что уравнения для r' и r_1' получаются из уравнений для r и r_1 заменою Γ на $-\Gamma$, h на $-h$ и заменою m и n.[1]

Предположим теперь, что при движении вихрей, образующих дорогу Кармана, некоторые вихри неподвижно закреплены и не могут смещаться; тогда для соответствующих вихрей выражения (1) x, y, x', y' тождественно равны 0, а потому в них надо заменить $e^{m\varphi i}$ или $e^{n\varphi i}$ через 0. Если соответственно в верхнем и нижнем ряду свободны вихри с номерами M и N, где M и N некоторые из целых чисел, то для движения вихрей номера $m=0$ или $n=0$ получим уравнения (2), но значения коэффициентов $A \dots C_1$ примут вид:

$$A = \Sigma' \frac{1}{m^2} - \Sigma' \frac{e^{M\varphi i}}{M^2} - \Sigma \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - k^2}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + k^2\right]^2}$$

$$B = \Sigma \frac{(2N+1)k}{\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)^2 + k^2\right]^2} e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)\varphi} \tag{3'}$$

$$C = \Sigma \frac{\left(N+\frac{1}{2}\right)^2 - k^2}{\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)^2 + k^2\right]^2} e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)\varphi}$$

[1] Вывод этих уравнений см., напр., у В. В. Голубева, Теория крыла конечного размаха, гл. I, § 15.

$$A_1 = \Sigma' \frac{1}{n^2} - \Sigma' \frac{e^{N\varphi i}}{N^2} - \Sigma \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 - k^2}{\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + k^2\right]^2}$$

$$B_1 = \Sigma \frac{(2M+1)k}{\left[\left(M+\frac{1}{2}\right)^2 + k^2\right]^2} e^{i\left(M+\frac{1}{2}\right)\varphi} \tag{4'}$$

$$C_1 = \Sigma \frac{\left(M+\frac{1}{2}\right)^2 - k^2}{\left[\left(M+\frac{1}{2}\right)^2 + k^2\right]^2} e^{i\left(M+\frac{1}{2}\right)\varphi}.$$

Рассмотрим случай, изученный Н. Е. Жуковским, когда все вихри нижнего ряда закреплены (т. е. чисел N нет), а в верхнем ряде свободен только «нулевой» вихрь (т. е. $M=0$), тогда уравнения (2) превратятся в

$$\frac{2\pi l^2}{\Gamma}\frac{dr}{dt} = -Ar_1; \quad \frac{2\pi l^2}{\Gamma}\frac{dr_1}{dt_1} = -Ar, \tag{5}$$

где

$$A = \Sigma' \frac{1}{m^2} - \Sigma \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - k^2}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + k^2\right]^2} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{ch^2 k\pi}.$$

Движение, определяемое уравнениями (5) неустойчивое, кроме случая $A=0$, когда оно становится безразличным. Отсюда получаем условие Н. Е. Жуковского:

$$\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{ch^2 k\pi} = 0$$

и

$$chk\pi = \sqrt{3}.$$

Предположим теперь, что все вихри свободны и поищем, нет ли таких колебаний вихрей, когда вихрь номера $m=0$ колеблется, а все остальные неподвижны, но свободны. Тогда от системы (2) остаются уравнения (5):

$$\frac{2\pi l^2}{\Gamma}\frac{dr}{dt} = -Ar_1; \quad \frac{2\pi l^2}{\Gamma}\frac{dr_1}{dt} = -Ar$$

и, так как $r' = r_1' = 0$:

$$-B_1 r + C_1 r_1 = 0; \; C_1 r + B_1 r_1 = 0, \tag{6}$$

где, так как $M=0$:

$$B_1=\frac{k}{\left(\frac{1}{4}+k^2\right)^2}e^{i\frac{\varphi}{2}};\quad C_1=\frac{\frac{1}{4}-k^2}{\left(\frac{1}{4}+k^2\right)^2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \tag{7}$$

Из уравнений (6) имеем:

$$B_1^2+C_1^2=0$$

или, подставляя значения (7):

$$\frac{1}{\left[\frac{1}{4}+k^2\right]}=0.$$

Это условие противоречит условию Н. Е. Жуковского. Отсюда следует, что в случае, если все вихри дороги Кармана свободны, то случай одного колеблющегося вихря, разобранный Н. Е. Жуковским, невозможен. Впрочем, следует заметить, что это достаточно ясно и физически. Отсюда получаем вывод:

Случаи движения вихрей, рассматриваемые Карманом и Н. Е. Жуковским, существенно различны. Карман рассматривает условия устойчивости равновесия вихрей в предположении, что все вихри свободны и могут перемещаться; Н. Е. Жуковский рассматривает условия устойчивости в предположении, что свободен и может перемещаться только один вихрь, а все остальные вихри дороги Кармана закреплены.

В предыдущем показано, что случай Н. Е. Жуковского нельзя рассматривать как частный случай общей задачи Кармана. Карман и Жуковский решали две совершенно различные задачи; естественно, что условия устойчивости равновесия при этом получились различные. Попытка, сделанная Н. Е. Жуковским, рассматривать любое смещение вихрей как наложение смещений разобранного им типа — невыполнима, так как в случае, если, кроме одного подвижного вихря в дороге Кармана, есть и другие подвижные вихри, то уравнения (5) отпадают, и мы не получим условия Н. Е. Жуковского.

Случай, разобранный Н. Е. Жуковским, можно видоизменять различными способами; при этом получаются не лишенные интереса результаты.

Пусть, например, весь нижний ряд закреплен, а в верхнем ряде часть вихрей свободна. Тогда уравнения (2) дадут:

$$\frac{2\pi l^2}{\Gamma}\frac{dr}{dt}=-Ar_1;\quad \frac{2\pi l^2}{\Gamma}\frac{dr_1}{dt}=-Ar, \tag{8}$$

где

$$A = \Sigma' \frac{1}{m^2} - \Sigma \frac{e^{M\varphi i}}{M^2} - \Sigma \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - k^2}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + k^2\right]^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{ch^2 k\pi} - \Sigma' \frac{\cos M\varphi}{M^2} - i\Sigma' \frac{\sin M\varphi}{M^2}.$$

Из уравнений (8) видим, что равновесие устойчивое только в случае, если действительная часть $A = 0$; итак при всяком $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ должно быть

$$\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{ch^2 k\pi} - \Sigma' \frac{\cos M\varphi}{M^2} = 0. \tag{9}$$

Покажем, что это невозможно ни при каких целых M. Для этого умножим (9) на $\cos P\varphi$ и проинтегрируем в пределах от 0 до π; получим

$$\frac{1}{P^2} = 0$$

или

$$\frac{1}{P^2} + \frac{1}{P^2} = 0,$$

смотря по тому, будет ли среди чисел M только одно из чисел $+P$ или $-P$, или они входят оба. Отсюда вывод: *если в нижнем ряду все вихри закреплены, а в верхнем, кроме вихря номера 0, есть другие свободные вихри, то равновесие неустойчивое.*

Подобным же методом можно разобрать и ряд других случаев.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

КАТАПЛЕИТ ХИБИНСКИХ ТУНДР

Е. Е. КОСТЫЛЕВОЙ.

(*Представлено академиком* **А. Е. Ферсманом**)

Катаплеит до 1930 г. для Хибинских Тундр был неизвестен. В 1930 г. катаплеит был найден одновременно двумя отрядами Кольской экспедиции под руководством Э. М. Бонштедт и Е. В. Цинзерлинг в нескольких месторождениях как коренных, так и в осыпях в центральной части Хибинских Тундр. В 1931 г. Кукисвумчоррским отрядом под руководством Э. М. Бонштедт при минералогическом обследовании Кукисвумчорра было найдено еще несколько новых месторождений. Последующий просмотр автором материалов всех прежних экспедиций специально на катаплеит обнаружил его присутствие еще в некоторых месторождениях, где он своевременно не был подмечен в виду большого своего внешнего сходства с полевым шпатом; таким образом, было установлено нахождение катаплеита еще в некоторых пунктах центральной части Хибинских Тундр. На основании всех сделанных находок катаплеит оказывается довольно распространенным минералом для определенной петрографической зоны в Хибинских Тундрах. Приводимое ниже описание дает его состав, оптические и кристаллографические свойства и намечает определенные его парагенетические и геохимические соотношения, на которые в будущих экспедициях необходимо обратить внимание для отыскания и прослеживания более детально всей зоны распространения катаплеита в Хибинских Тундрах.

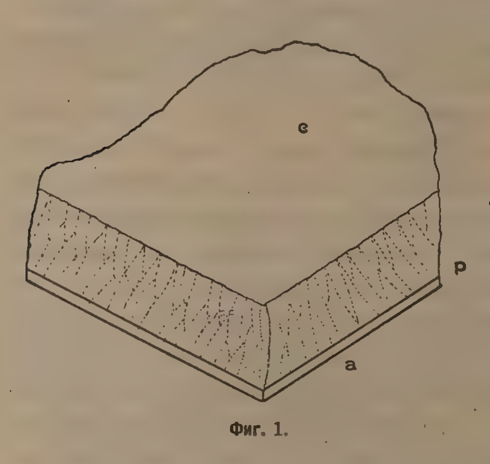
ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ

Катаплеит в Хибинских Тундрах встречается в обычных шлировых пегматитовых выделениях или типичных пегматитовых жилах. Он наблюдается от мелких различимых хорошо лишь в лупу пластинок до крупных в 6—7 см длины пластинчатых, иногда идиоморфных аггрегатов. Цвет его

различен от темношоколадного цвета, красновато-коричневого, светло-желто-розоватого, бурого до почти бесцветного. В некоторых выделениях бесцветные его пластинчатые аггрегаты напоминают по спайности полевой шпат. Блеск на пластинках, параллельно которым идет спайность по базопинакоиду, стеклянный; в перпендикулярном направлении, где спайность выражена слабо, наблюдается очень слабый блеск, излом почти матовой. Твердость 5—6. Уд. вес = 2,38.

КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

Катаплеит встречается в листоватых и таблитчатых, частью идиоморфных аггрегатах до 6 см длины, заключенных, главным образом, в полевой шпат, нефелин, эгирин, натролит. Хорошо образованные кристаллы являются большой редкостью, чаще наблюдаются неполные кристаллы с единично-сохранившимися гранями. Главное коренное месторождение катаплеита в долине Тульи (№ 236), описываемое подробно в главе о месторождениях, доставило далеко несовершенный кристаллографический материал, на основании которого и дается краткое описание его кристаллографических свойств.



Фиг. 1.

Катаплеит наблюдался в крупных таблитчатых кристаллах гексагонального облика до 3—4 см поперечника при 0.8 толщины, на которых устанавливаются следующие формы: базопинакоид c $\{0001\}$, призмы a $\{10\bar{1}0\}$, p $\{10\bar{1}1\}$. Базопинакоид c $\{0001\}$ обычно очень сильно развитый, блестящий, на перефирии с ясно выраженными фигурами роста по направлению к призмам, образующими скорлуповатые типичные вицинальные грани, очень слабого наклона по отношению к оси Z. (см. фиг. 1); грани p $\{10\bar{1}1\}$ наблюдались на трех кристаллах в виде узких слабо блестящих полосок; грани a $\{10\bar{1}1\}$ наблюдались на трех кристаллах тоже в виде слабо блестящих слегка разъеденных полосок.

Кристаллографический материал очень беден и не дает возможности установить принадлежность минерала к моноклинической сингонии. Ясных

признаков присутствия двойников не наблюдалось, но двойниковая структура на базопинакоиде, описанная Boeggild'ом,[1] наблюдалась ясно во многих случаях. Для решения вопроса о его сингонии был передан материал бесцветного прозрачного катаплеита в рентгеноскопическое изучение Б. К. Бруновскому, которое и приводится особо.

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

Исследованный ряд шлифов катаплеита из различных месторождений в разрезах параллельно (0001) показал почти всюду правильно одноосную фигуру со слабо расходящимся крестом. Оптический знак +; разрезы перпендикулярные к спайности характеризуются высоким двупреломлением, прямым погасанием и положительным удлинением. Для получения точных оптических констант был взят кристалл из месторождения склона Кукисвумчорра долины Тульи, на котором методом погружения в жидкости на рефрактометре Fuess'а определены следующие показатели преломления в свете Na: $Ng = 1,6245$; $Np = 1,5961$; $Ng - Np = 0.0284$.

ХИМИЧЕСКИЙ СОСТАВ

Полный химический анализ катаплеита был проделан из двух месторождений: I—из коренного месторождения с натролитом долины Тульи, № 236 (№ 4 на карте,) и II—из осыпей ильменито-катаплеитовых выделений цирконовой перемычки (№ 9 на карте).

Как показывают приводимые ниже анализы,[2] состав Хибинских катаплеитов обоих месторождений отвечает нормальному составу кальциево-натровых катаплеитов. Для совершенно бесцветных катаплеитов, похожих несколько на натровые катаплеиты Норвегии, в виду недостаточности материала было лишь проделано определение содержания Са, давшего значительно пониженное содержания СаО, именно 1.96% для одного из месторождений перевала Лопарского из осыпей астрофиллито-полевошпатовых жил (№ 2а на карте, фиг. 3)

Пересчет анализов отвечает формуле, даваемой для катаплеитов Brögger'om: (Na_2O_3CaO). ZrO_2. $3SiO_2$. $2H_2O$. Анализ II, за недостатком материала, проделан лишь один раз; вода, за неимением материала, не определялась и взята как разность всей суммы до 100.

[1] O. B. Boeggild. Meddelelser om Grönland, XXXIII, 1906, p. 114

[2] Оба анализа произведены в лаборатории Геохимического института Е. Костылевой, отдельные определения сделаны В. Быковой.

Химический анализ

	I			II		
	%	молек. отн.		%	молек. отн.	
SiO_2	44.77	0.7454	3	44.10	0.7342	3
TiO_2	0.28	0.0036	0.2458 1	0.43	0.0054	0.2574 1
ZrO_2	29.85	0.2422		31.06	0.2520	
$Fe_2O_3 + Al_2O_3$	1.02			0.83		
MnO	0.03					
CaO	3.72	0.0664	0.2480 1	3.40	0.0606	0.2535 1
MgO	0.26	0.005		0.03	—	
Na_2O	10.29	0.1658		10.36	0.1670	
K_2O	1.02	0.0108		2.44	0.0259	
H_2O (пот. п. прок).	9.56	0.5311	2	(7.35)	0.408	1½
сумма	100.80			100.00		

ОПИСАНИЕ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Катаплеит встречен и известен до сих пор из следующих мест:

1. Кукисвумчорр — склон к перевалу Лопарскому (осыпь).
2. „ вершина у перевала Лопарского (№ 244[1], (коренная жила).
2а. „ „ (2 месторождения в осыпи).
3. „ перевал Лопарский (№ 78, коренная полевошпато-астрофиллитовая жила).
4. „ склон в Тулью, Жильная долина (№ 236, коренная натролито-катаплеитовая жила).
5. „ северозападный склон Жильной долины (№ 228, коренная линза).
6. „ „ (№ 229, коренная жила).
7. „ „ Верховье Тульи (осыпь).
8. „ 4-й западный цирк (осыпь).
9. Сев. Кукисвумчорр = Куэльпор. Цирконовая перемычка, (осыпь).
10. „ „ „ Эвдиалитовая перемычка (осыпь).
11. „ „ „ Южнее эвдиалитовой перемычки (осыпь).
12. Каскаснюначорр (осыпь).
13. Эвеслогчорр. Долина 2-го левого притока Вуоннемиока (осыпь).
14. „ Долина Вуоннемиока (осыпь).
15. Ловчорр, Пирротиновое ущелье (№ 91, цирконо-полевошпатовая жила).

Все сделанные до сих пор находки, в виду их значительной разбросанности, нанесены на прилагаемую при сем общую схематическую карту Хибинских и Ловозерских Тундр (фиг. 2).

Для Кукисвумчорра, где катаплеит особенно распространен, месторождения нанесены под перечисленными выше №№ на схематическую карту

[1] №№ месторождений — продолжение общей нумерации коренных месторождений, приведенной во II т. «Хибинских Тундр», под ред. А. Е. Ферсмана.



Фиг. 2. Схематическая карта Хибинских и Ловозерских Тундр с распределением минералов эвдиалитового ряда и катаплеита.

Кукисвумчорра (фиг. 3) Б Куплетского и В. Влодавца), где приведена также петрографическая основа согласно последних работ Б. М. Куплетского.

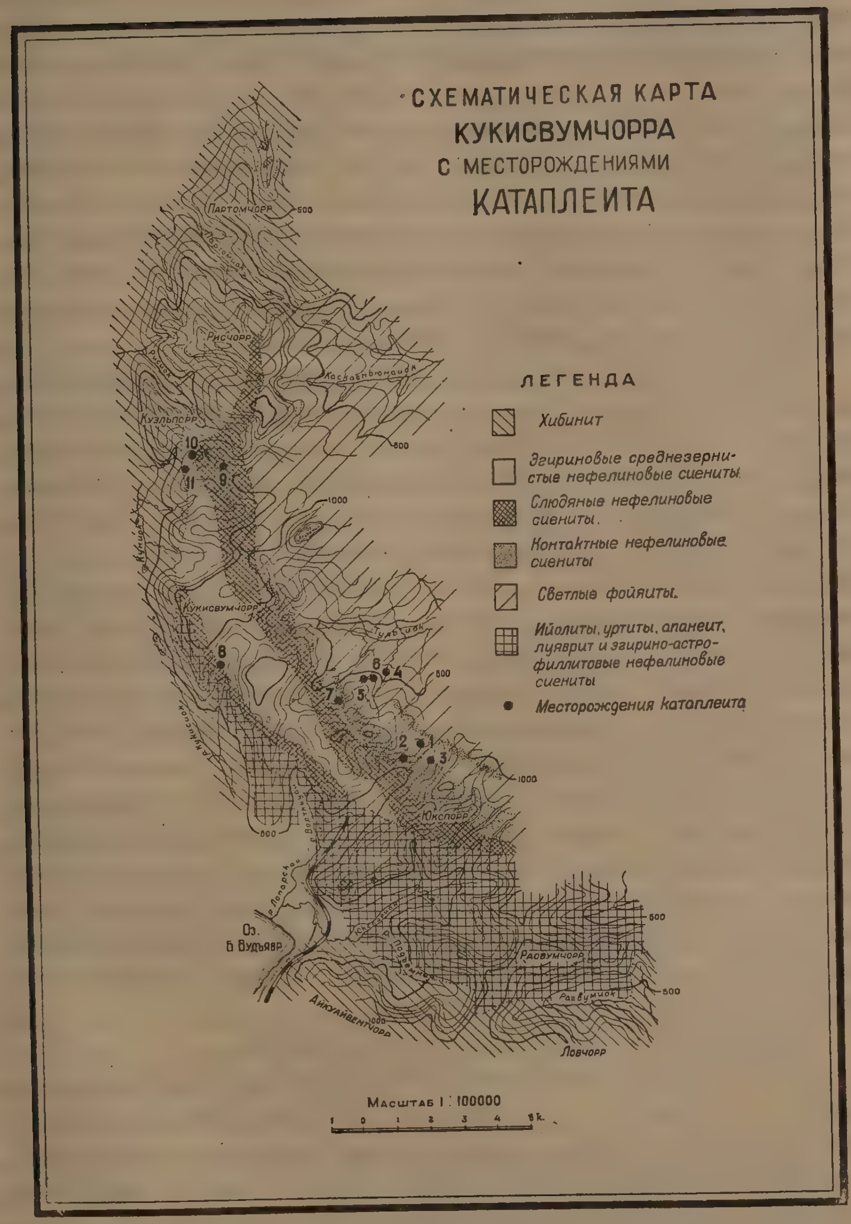
Как показывает карта (фиг. 2), месторождения катаплеита известны кроме того на Эвеслогчорре и Ловчорре и севернее на Каскасньюначорре. Распространение катаплеита намечается, как это типично для Хибин, по дуговой зоне,[1] которая совпадает с зоной развития молодых пород серии нефелиновых сиенитов Хибинских Тундр — а именно с фойяитами по терминологии Б. М. Куплетского, т. е. с молодыми роговообманковыми нефелиновыми сиенитами и слюдяно-нефелиновыми сиенитами.

Описание месторождений, приводимое ниже, сгруппировано по главным типам жильных выделений, с которыми связываются катаплеиты.

А. Полевошпато-нефелино-роговообманковые выделения. Очень распространенные в фойяитах жильные выделения. Катаплеит известен из коренного натролито-катаплеитового месторождения этого типа № 236 (№ 4 по карте 3). Подробно о жильных выделениях всего типа, как вообще и о минералогии Кукисвумчорра, см. работу Э. Бонштедт,[2] откуда взяты и краткие полевые данные. Описываемое месторождение с катаплеитом расположено в Жильной долине, на левом берегу, на высоте 490 м и представляет собою жилу мощностью до 2 м, протяжения 12—16 м. Строение жилы неоднородное, главная масса жилы слагается крупным микроклином, роговыми обманками, нефелином, частично шпреуштейнизированным, с местными скоплениями эгирина II, с астрофиллитом, эвколитом, альбитом и с призмами эгирина. В главной массе жилы наблюдаются отдельные гнезда вздутия, которые носят иной минералогический характер. Обильные массы натролита, катаплеита, меньше рамзаита, астрофиллита и вторичный продукт — землистое вещество со слюдкой. Катаплеит — один из главных после натролита минералов — шоколадного цвета, образует длинные пластинчатые аггрегаты, пересекающиеся во всех направлениях. Аггрегаты эти частично погружены в натролит, частично в буроватую землистую массу вторичного продукта. Рамзаит правильными кристаллами и идиоморфными аггрегатами заключен в натролит. Астрофиллит образует лучистые аггрегаты в натролите. Мезолит или мелко-кристаллической натролит выстилает промежутки между пересекающимися аггрегатами катаплеита. Образование катаплеита очень раннее, его пластинчатые аггрегаты переслаиваются с астрофиллитами одновременного образования: по отношению к рамзаиту

[1] А. Ферсман. Геохимические дуги Хибинских Тундр. ДАН-А. 1931, № 14, стр. 367.

[2] Э. М. Бонштедт. К минералогии и геохимии Кукисвумчорра. Тр. Кольск. эксп., изд. СОПС (в печати).


СХЕМАТИЧЕСКАЯ КАРТА
КУКИСВУМЧОРРА
С МЕСТОРОЖДЕНИЯМИ
КАТАПЛЕИТА
ЛЕГЕНДА
Хибинит
Эгириновые среднезернистые нефелиновые сиениты
Слюдяные нефелиновые сиениты.
Контактные нефелиновые сиениты
Светлые фойяиты.
Ийолиты, уртиты, апанеит, луяврит и эгирино-астрофиллитовые нефелиновые сиениты
Месторождения катаплеита
Партомчорр
Рисчорр
Кузъльпорр
Кукисвумчорр
Юкспорр
Раовумчорр
Ловчорр
Айкуайвенчорр
Оз. Б. Вудъявр
Масштаб 1:100000

Фиг. 3.

катаплеит образуется даже раньше, судя по его пластинчатым аггрегатам, включенным в кристалл рамзаита. Буроватое, землистое со слюдой вещество является несомненно побочным продуктом разрушения эвдиалита; оптическое изучение этого побочного продукта указывает на смесь аггрегатов цеолита, слюдки, буроватого, иризирующего, полупрозрачного вещества и пересекающихся аггрегатов катаплеита. Местами сохраняется эвколит, на счет которого идет образование катаплеита. Таким образом, это месторождение носит явно вторичный характер по отношению к катаплеиту. Процесс перегруппировки и образования катаплеита на счет эвколита шел при очень высокой температуре и относится ко времени образования астрофиллита; позднее все было захвачено мощным цеолитным процессом.

Б. Астрофиллито-полевошпатовые выделения. Подробно описаны во II т. «Хибинских Тундр», где, однако, катаплеит, как второстепенная составная часть не отмечен. В этом типе выделения катаплеит встречен в нескольких пунктах Кукисвумчорра. Месторождения, где встречен катаплеит, довольно однообразны по своему парагенезису: полевой шпат, микроклинпертит, нефелин, иногда шпреуштейнизированный, астрофиллит спайными или радиально-лучистыми аггрегатами, призматический черный эгирин 1-й генерации, редкий эвколит, то свежий, то разрушенный, катаплеит очень светлых розоватых и желтоватых оттенков, мелкие включения свинцового блеска и цинковой обманки в полевом шпате и кристаллический мелкий натролит в пустотках между выделениями астрофиллита. Катаплеит очень чистый, плотный, спайный, розоватый, желтоватый или чисто белый, выполняет промежутки между астрофиллитом и полевым шпатом, частично переслаиваясь с астрофиллитом. В катаплеите иногда заметны идиоморфные выделения кристалликов эгирина, довольно часто в штуфах с катаплеитом видны выделения эвколита, совершенно свежего, не тронутого изменением. В других случаях присутствуют продукты изменения, повидимому эвколита, в виде буроватокрасноватой землистой или ноздреватой массы, в которой микроскопически удалось установить присутствие катаплеита.

К этому типу выделений относятся месторождения:

а) На северозападном склоне Жильной долины коренная линза в 2 м длины и 25—30 мощности (№ 5, карта, фиг. 3). Кроме упомянутых главных минералов, месторождение содержит отдельные скопления анцилита в виде скелетных заполнений пустот в полевом шпате и мелкие кристаллики рамзаита, катаплеит же образует буроваторозовые пластинки.

б) Коренная линза на южном склоне Кукисвумчорра к перевалу Лопарскому около полуметра в диаметре из полевого шпата и крупных пластин

астрофиллита (№ 2, карта, фиг. 3). Кроме упомянутых минералов, иногда наблюдаются мелкие кристаллы рамзаита, немного флюорита и натролита. Эвколит сильно разрушен в буроватое землистое вещество. Около этого месторождения отрядом Э. М. Бонштедт взято в осыпи несколько кусков с несколько иным парагенезисом, а именно: один представляет выделение микроклина с альбитом, со скоплениями лучистого эгирина и с пластинчатым, светлым, почти бесцветным катаплеитом; кроме того, в массе полевого шпата видны блестки астрофиллита, кристаллики прозрачного рамзаита; другой штуф представляет собой ту же массу мелкокристаллического полевого шпата с крупными звездчатыми астрофиллитами и эгиринами; катаплеит спайными пластинками в полевом шпате пересекается лучами астрофиллита; наконец, несколько кусков по внешности типично полевошпато-цирконового типа с ноздреватым мелкокристаллическим калиевым полевым шпатом, в пустотах которого вместе с кристалликами полевого шпата кристаллики прозрачного рамзаита. Катаплеит образует или редкие кристаллики в пустотах или чаще сплошные спайные аггрегаты; в полевом шпате, кроме того, много слегка оплавленных бесцветных кристалликов апатита и мелкие выделения ильменита.

в) Полевошпато-астрофиллитовая жила перевала Лопарского (№ 3 той же карты). Подробное описание во II т. «Хибинских Тундр»». Катаплеит светлый, спайный, образует некрупные выделения в астрофиллите.

г) Верховье Тульи, северозападный склон Жильной долины, коренная жила (№ 6, карта фиг. 3) длиной около 5 м и 0.75 м мощности. Кроме упомянутых главных минералов всего типа содержит: белый сахаровидный альбит, немного канкринита, ильменита и эвколит, местами совершенно свежий, местами с переходом в катаплеит.

д) 1 кусок в осыпи на вершине Кукисвумчорра над перевалом Лопарским, (№ 1, карта фиг. 3). Прекрасно спайный, слегка розоватый катаплеит, около 5 см в поперечнике и в 1 см толщины, в полевом шпате облекает крупные черные кристаллы эгирина. В полевом шпате крупные включения желтого сфена, шпреуштейнизированного нефелина и 2 кристалла анальцима. Астрофиллита очень немного.

В. Близко к описанному типу стоят выделения с катаплеитом, встреченные на Эвеслогчорре, которые можно охарактеризовать как полевошпато-астрофиллитовые с биотитом выделения. Петрографически они приурочиваются к зоне слюдяных нефелиновых сиенитов и пока обнаружены в долине второго левого притока Вуоннемиока и верховьев Вуоннемиока. Главные минералы Вуоннемиокского месторождения катаплеита на Эвеслог-

чорре те же, что и в полевошпато-астрофиллитовых выделениях фойяитовой зоны на Кукисвумчорре. Отличие заключается в несколько большей свежести и белизне полевого шпата, присутствии вместе с эгирином роговой обманки, желтого сфена, биотита, а главное, в довольно обычном нахождении лилового флюорита, включенного в эвколит и катаплеит. Катаплеит в описываемых штуфах носит совершенно особый характер, ассоциируясь всегда с эвколитом; он частично окружает совершенно свежие выделения бледножелтого эвколита, частично дает незаметные переходы к сплошным спайным выделениям светлого серовато-желтого катаплеита. Флюорит образует довольно крупные в несколько миллиметров включения в катаплеите, иногда и в эвколите. Характерно отсутствие побочных продуктов изменения эвколита и свежий характер выделения как эвколита, так и катаплеита.

Г. Полевошпато-цирконовые жилы, подробно описаные во II т. «Хибинских Тундр». В данном типе жильных выделений катаплеит обнаружен лишь в одном месторождении на Ловчорре, в цирконо-полевошпатовой жиле Пирротинового ущелья, месторождепие № 91 поэтому ниже приводится описание лишь данного месторождения. Последнее представляет собой коренную жилу в контактной зоне умптекитов с кремнистыми сланцами. Жила залегает в крутом склоне Пирротинового ущелья на высоте около 200 м. (карта ущелья см. II т. «Хибинские и Ловозерские Тундры», стр. 271) Вблизи от описываемого месторождения—выходы пирротиновой породы. Минералы жилы: К-полевой шпат — микроклин, циркон, эгирин I, роговая обманка, катаплеит; как циркон, так и эгирин сидят в многочисленных пустотах или в массе полевого шпата. Эгирин часто заключен в циркон. Катаплет иногда в тесной ассоциации с цирконом образует некрупные таблички коричнево-красноватого цвета в эгирине. По отношению к циркону катаплеит более раннего образования, переходы между цирконом и катаплеитом совсем не заметны. Кроме упомянутых минералов присутствует в небольшом количестве зеленый анцилитоподобный минерал. Катаплеит, вероятно, вторичного происхождения, на что указывает найденный в осыпи того же месторождения интересный образец типичной полевошпато-астрофиллитовой жилы, где крупный идиоморфный участок эвдиалита, облекающий шпреуштейнизированный нефелин со спайным астрофиллитом, ясно во всей своей массе перекристаллизовывается в катаплеит, эвдиалит при этом делается ноздреватый с ясными табличками катаплеита.

Д. Ильменито-рамзаито-катаплеитовые выделения с флюоритом и канкринитом. Указанные выделения, типа шлировых, обнимают собой довольно многочисленные разрозненные находки штуфов в северной

части массива Кукисвумчорра. Петрографически этот тип выделений с катаплеитом связывается с зоной слюдяных нефелиновых сиенитов и несколько отличается от всех перечисленных выше типов месторождений, приуроченных к фойяитовой зоне. Для него характерна бедность астрофиллитом, значительная роль ильменита, рамзаита, сернистых соединений (галенита, сфалерита) и флюорита; подробно парагенезис устанавливается из описания принадлежащих сюда отдельных находок:

а) Кукисивумчорр, осыпи 4-го цирка (№ 8, карта, фиг. 3). Катаплеит светлобурого цвета заключен в светлый сплошной канкринит, частью в полевой шпат, проникнутый эгирином II генерации, ильменитом, рамзаитом; из других минералов наблюдаются мелкие выделения темного сфалерита, кристаллики натролита и мелкие лучистые аггрегаты астрофиллита.

б) Эвдиалитовая перемычка между Кукисвумчорром и Куэльпором (осыпь, № 10 на фиг. 3). Светлый розово-желтый катаплеит образует сплошные спайные аггрегаты в 1 см поперечника, обильно пронизанные кристаллическим и идиоморфным ильменитом; катаплеит окружен и пересекается белым лучистым натролитом. Главная масса этого жильного выделения принадлежит полевому шпату, нефелину, волокнистому зеленому эгирину, уже упомянутому ильмениту; в одном штуфе крупное включение сфалерита и радиально-лучистого астрофиллита.

в) Кукисвумчорр, Цирконовая перемычка (осыпь, № 9 той же карты) главные минералы: полевой шпат (микроклин — пертит), нефелин, эгирин I генерации в виде крупных призматических кристаллов. Катаплеит светложелтого цвета, спайными сплошными аггрегатами заключен в полевой шпат и нефелин, пересекается кристаллами эгирина II, изобилует включениями в 1—1.5 см флюорита. Наиболее интересной особенностью являются мелкие, в несколько миллиметров, включения светложелтого минерала, группы мелинофана-лейкофана, сидящие в канкрините.

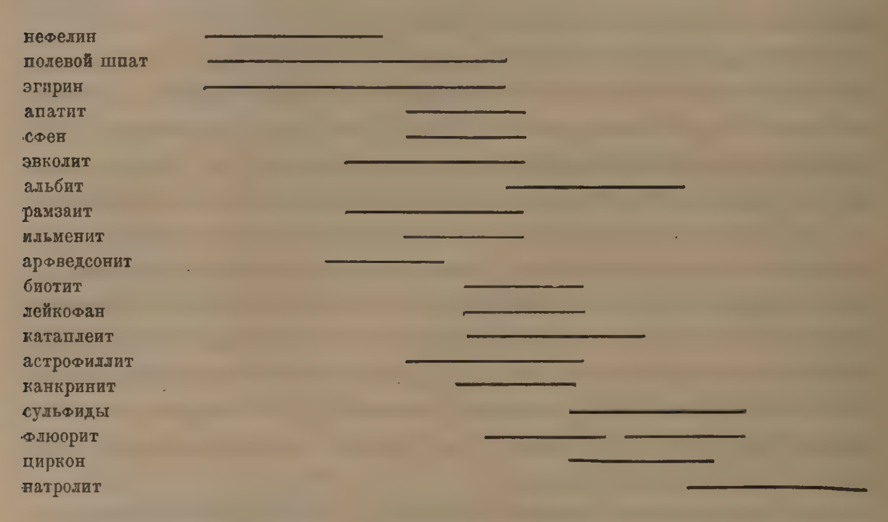
г) Каскасньюначорр (осыпь, № 12 по карте 3). Почти бесцветный листоватый катаплеит окружает и частью внедряется в крупные кристаллы ильменита и микроклин-пертита. В последнем, кроме того, заключены многочисленные крупные включения бесцветного флюорита.

ПАРАГЕНЕЗИС, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И УСЛОВИЯ ВЫДЕЛЕНИЯ

На основании имеющегося до сих пор материала можно установить следующий парагенезис катаплеита: полевой шпат, нефелин, эгирин I и реже эгирин II генераций, роговая обманка, астрофиллит, биотит, сфен, ильменит, рамзаит, эвколит, (ринколит), флюорит, (анцилит), свинцовый блеск,

сфалерит мелинофан), апатит,[1] канкринит, натролит, анальцим. (Редкие по парагенезису минералы заключены в скобки).

Время образования катаплеита приурочивается к концу образования астрофиллита, ильменита и рамзаита. Нижеприводимая таблица последовательности выделения дает более ясное представление о времени его выделения по отношению к другим минералам.



Как видно из таблицы, катаплеит очень раннего образования, конца пегматоидной и начала пневматолитической стадии; температура его выделения — около 500°, что отвечает фазам D — E диаграммы А. Е. Ферсмана.

Широко развитые в других щелочных массивах явления — преобразование эвдиалита в катаплеит и псевдоморфозы катаплеита по эвдиалиту, повидимому, имеют распространение и в Хибинских Тундрах. Насколько об этом позволяет судить довольно случайно собранный материал, ясное преобразование эвдиалита в катаплеит наблюдается, главным образом, в месторождениях Кукисвумчорра на склоне в долину Тульи (напр., № 236), в некоторых полевошпато-астрофиллитовых месторождениях на Кукисвумчорре и в верховьи Вуоннемиока.

Насколько можно судить по материалу, имевшемуся в распоряжении автора, в парагенетическом отношении для катаплеитов можно наметить следующие типы выделений.

а) Катаплеиты, не связанные в своем парагенезисе с эвколитом, являющиеся в виде чистых аггрегатов и не сопровождающиеся побочными

продуктами разрушения минералов эвдиалитового ряда или самим эвдалитом в свежем или разрушенном состоянии. Парагенезис: полевой шпат, эгирин I, арфведсонит, рамзаит, ильменит, флюорит, канкринит, сернистые соединения, в небольшом количестве натролит. Из приведенных выше типов жильных выделений, повидимому, сюда могут быть отнесены эгирино-ильменитовые скопления с рамзаитом и может быть некоторые из полевошпато-астрофиллитовых выделений.

б) Катаплеиты, тесно связанные в своем парагенезисе с эвколитом или его побочными продуктами разрушения. Сюда относятся вполне определенно натролито-катаплеитовое месторождение долины Тульи № 236, месторождение катаплеита в долине Вуоннемиока, катаплеит в Пирротиновом ущельи и еще некоторые полевошпатово-астрофиллитовые выделения. Повидимому, такое разделение на 2 типа лежит вне группировок по жильным выделениям, так как в одном и том же жильном выделении катаплеит мог образоваться как независимо, так и вследствие изменения эвколита.

Как уже указано, катаплеиты связаны с более молодыми породами и территориально распространяются дугой во внутренней части Хибинских Тундр (фиг. 2). На основании последних работ[1] процессы дугового характера, столь характерно выраженные в Хибинах, связаны, с одной стороны, с постепенным охлаждением магматического очага, с другой стороны, связаны с тектоничсскими разломами и расколами наблюдаемыми в Хибинских Тундрах.

Охлаждение магматического бассейна, начавшееся с периферии, постепенно продвигалось к центру; это охлаждение вызывало постепенную смену пород: от хибинитов у периферии и далее к центру серию луявритов, мелкозернистых нефелиновых сиенитов, уртитов, слюдяных разностей и, наконец, фойяитов как наиболее молодых разностей нефелиновых сиенитов. Химический состав этой серии пород, начиная от наиболее ранних — хибинитов — и кончая наиболее молодыми, с которыми связаны катаплеиты, в среднем сходен друг с другом, но породы значительно различаются по структуре и минералогическому характеру. Еще более меняется минералогический состав и характер пегматитового процесса в жильных выделениях всей смены пород. От обычных пегматитов хибинита, с преобладающим развитием фаз ABC, как это установлено диаграммой А. Е. Ферсмана,[2] с преобладающим развитием минералов: энигматита, лампрофиллита, эвдиалита-мезадиалита, эгирина I и II, микроклина, нефелина, ринколита —

1 А. Е. Ферсман. Геохимические дуги Хибинск. Тундр. ДАН-А, 1931, № 14, стр. 367.

2 А. Е. Ферсман. Геохимическая диаграмма Хибинских Тундр. ДАН-А, 1931, № 8, стр. 193.

пегматиты слюдяной и фойяитовой зоны отличаются преобладающим развитием фаз D — G и иным минералогическим комплексом, содержащим минералы: астрофиллит, сфен, роговую обманку, рамзаит, эвколит, полевой шпат, нефелин, флюорит, ильменит, сернистые соединения, канкринит и цеолиты. Это указывает на изменение химического состава пегматитового остатка в сторону обогащения Ca и летучими компонентами F,S,P и CO_2. При местном увеличении концентрации Zr и H_2O в том или ином участке остывающей магмы, вполне допустимым является самостоятельное выделение катаплеита, без предшествующего образования эвдиалит-эвколита. Для выделения катаплеита одним из наибоиее благоприятных факторов является присутствие F, что видно из очень обычной ассоциации катаплеита с флюоритом, и что находит себе объяснение в летучести ZrF_4, выносимого из очага магмы и разлагаемого впоследствии парами воды, выделяемыми охлаждающейся магмой на ZrO_2 и HF, которые реагируют с охлаждающимися пегматитовыми расплавами и дают, в зависимости от химизма расплава, катаплеит с флюоритом или циркон с флюоритом.

Явления тектонических разломов и расколов как концентрических так и перпендикулярных к ним, явившихся следствием охлаждения всего бассейна и связанного с ним сокращения объема всего остывающего массива, имели, повидимому, большое значение в процессе образования катаплеита, главным образом, за счет разрушения эвдиалита-эвколита. Более легкое проникновение по тектоническим разломам и расколам летучих газообразных соединений из глубинных частей магматического очага, обогащало еще остывавшую внутреннюю часть массива этими компонентами и вызывало как самостоятельное образование катаплеитов и цирконов, так и процессы изменения и разрушения уже застывающих минералов эвдиалитового ряда в сторону образования катаплеитов и далее циркона; этим и объясняется, что процесс изменения эвдиалитового ряда в катаплеит всегда очень ранний, совпадающий со временем остывания пород.

Процесс образования катаплеита за счет эвдиалита, повидимому, может идти двумя путями: а) с одной стороны, изменением минералов эвдиалитового ряда в катаплеит, без побочных продуктов разрушения эвдиалитов — простой перегруппировкой или перекристаллизацией. Этот тип вторичного образования катаплеита, повидимому, происходил вследствие преобладания в летучей составной части, воздействующей на остывающий минерал эвдиалитового ряда, Zr и F или вернее ZrF_4; последний, разлагаясь H_2O, взаимодействовал с эвдиалитом, обогащал его ZrO_2 и H_2O и сравнительно просто перегруппировывал эвдиалит в катаплеит, без образования побочных продуктов, но

с обязательным присутствием CaF_2 в массе эвдиалита и катаплеита; такое образование CaF_2 шло, повидимому, за счет Са эвдиалита или эвколита (месторождение долины Вуоннемиока); б) с другой стороны, процесс образования катаплеита за счет минералов эвдиалитового ряда сопровождался побочными продуктами разрушения, как цеолиты, вторичная слюдка и т. д. Этот тип вторичного образования происходил при воздействии, главным образом, H_2O при высокой температуре, что вызывало полный распад эвдиалитового минерала (с выносом избыточной части SiO_2, Na_2O, CaO, FeO, идущих на образование цеолитов и слюдки), способствовало образованию более богатого цирконием катаплеита и заканчивалось мощным цеолитным процессом (месторождение Жильной долины верх. Тульи № 236).

Как общее замечание к генезису катаплеитовых месторождений, и вообще жильных процессов в Хибинских Тундрах, надо отметить приуроченность их к контактам пород, а в отношении катаплеита — к контакту слюдяных нефелиновых сиенитов с фойяитом (Кукисвумчорр), и к контакту умптекита с хлоритовым сланцем (Пирротиновое ущелье Ловчорра). Поэтому образование катаплеитов за счет эвколитов нужно относить не только к линиям тектонических разломов и расколов, но и к зоне контактного взаимодействия пород.

Для более правильного понимания условий генезиса катаплеита в Хибинских Тундрах, ниже, для сравнения, приводится краткая сводка его месторождений в других главных районах щелочных пород.

МЕСТОРОЖДЕНИЯ ДРУГИХ ЩЕЛОЧНЫХ ПОРОД

Норвегия. В нефелиновых сиенитах Langesund fjord катаплеит встречается в пегматитовых выделениях островов Stokö, Eikahohmen, Arö и др. в довольно большом количестве. Крупные выделения встречаются всегда с лейкофаном. Более обычны для катаплеита мелкие таблитчатые кристаллы или радиально и розетковидно расположенные таблички. Катаплеит выделяется очень рано, раньше астрофиллита, полевого шпата, нефелина и раньше эвколита. В жилах содержащих катаплеит, другие цирконовые минералы, как вёлерит, хиордалит, обычно также и эвколит, отсутствуют. По химическому составу различается Ca-катаплеит в парагенезисе с астрофиллитом, лейкофаном, эгирином, полевым шпатом, нефелином и цеолитами, и более редкий Na-катаплеит в парагенезисе с полевым шпатом, содалитом, нефелином, черной слюдой, эгирином, ловенитом, эвколитом, астрофиллитом, молибденовым блеском, лейкофаном. Циркон дает интересные псевдоморфозы

по катаплеиту, мелкими пирамидальными кристалликами погруженными в анальцим.

Гренландия. Катаплеит встречается в следующих месторождениях:

1) в Нарсарсук — в пегматитовых жилах авгитовых сиенитов — кристаллы натрового катаплеита до 5 см длины, вместе с альбитом и эгирином, и мелкие кристаллы, до 3 мм, в пустотах породы вместе с микроклином, эгирином или мелкими кристаллами родохрозита, эпидидимита или циркона,

2) в Кангердлуарсук, в средне-или мелкозернистом нефелиновом сиените как продукт превращения или псевдорморфоз по эвдиалиту. Ussing[1] различает 3 типа псевдоморфоз катаплеита: а) Псевдоморфозы катаплеита в тесном парагенезисе с микроклином в эвдиалитовых фойяитах из Kumern. Катаплеит идиоморфен по отношению к микроклину, последний по своим свойствам не отличается от микроклина вне псевдорморфоз — в породе. Кристаллическая форма эвдиалита часто не сохраняется, переход от эвдиалита к катаплеиту совершенно не резкий, эвколит часто остается совершенно свежий. б) Псевдоморфозы катаплеита вместе с акмитом, небольшим количеством флюорита и цеолитов встречаются в богатых эвдиалитом фойяитах внутренних частей Кангердлуарсук и сопровождаются иногда вторичной слюдой. в) Псевдоморфозы из катаплеита вместе с анальцимом и минералом пектолитовой группы в луявритах.

Ussing отмечает как характерную особенность всех псевдоморфоз, что преобразование эвдиалита в катаплеит происходит носколько необычно для процесса образования псевдоморфоз: не по трещинам или краям, как обычно под влиянием каких-либо циркулирующих растворов, но намечается в каком-либо одном пункте, откуда и распространяется, причем остающийся эвдиалит сохраняется иногда совершенно свежим, без резкой границы с измененной частью. Другая особенность этих псевдоморфоз, что форма кристаллов эвдиалита нередко совсем не сохраняется, хотя эвдиалит неизмененный и имеет ясно выраженные кристаллографические очертания. Преобразование эвдиалита в катаплеит происходит очень рано, одновременно с остыванием самой породы.

Мадагаскар. На берегу Berourdra в массиве Bezavons Lacroix[3] описывает в нефелиновом эгириновом сиените эвдиалит, превращенный в катаплеит.

[1] Ussing. Meddelelser om Grönland, 14, 1898, p. 1848.

[2] Интересно отметит, что в псевдоморфозе этого типа побочных продуктов изменения эвдиалита не наблюдается, и так как полевой шпат (микроклин) трудно считать за побочный продукт перегруппировки эвдиалита в более богатый Zr — катаплеит, то непонятна судьба 6—7% железа из эвдиалита.

[3] Lacroix. Nouv. Arch. du Museum, 1903, XV, 185; ibid., 1902, IV, pp. 1—215.

Африка. В Трансваале, в нефелиновых сиенитах Пилансберга Brouver[1] отмечает богатство пегматитов эвколитом в луявритовых разностях. Пегматиты состоят из крупных кристаллов полевого шпата, зеленого нефелина, больших кристаллов эгирина и кармино-красного эвколита, частично измененного в катаплеит; кроме того немного астрофиллита.

Острова Los. В астрофиллито-эгириновом нефелиновом сиените катаплеит довольно распространен, кристалликами не более 0.2 мм. Lacroix[1] рассматривает его всегда как вторичный минерал, образовавшийся на счет эвдиалита. Превращение эвдиалита в катаплеит наблюдается очень часто, хотя эвдиалит встречается совершенно свежим, неразрушенным. Пластинки катаплеита располагаются или в беспорядке в эвдиалите, или ориентируются параллельно (0001) эвдиалита; пластинки катаплеита или встречаются в серединe кристаллов эвдиалита, не сопровождаясь никакими вторичными минералами, чаще же смешаны с флюоритом, эгирином, анальцимом, мезолитом и альбитом. Кроме того на о. Rouma встречена жилка породы — жильный тингуаит с эвдиалитом и катаплеитом.

Как видно из приведенной сводки, парагенезис катеплеита в главных районах щелочных пород довольно однообразный: катаплеиты связываются с более молодыми лейкократовыми разностями нефелиновых сиенитов, главным образом, с эгириновыми, астрофиллитовыми и фояйитами, где катаплеит чаще является вторичным по эвдиалиту и эвколиту образованием. В пегматитовых жилах Норвегии катаплеит образуется самостоятельно, независимо от минералов эвдиалитовой группы раньше, чем эвколит.

Катаплеиты Хибинских Тундр, встреченные в фоияитовой зоне, ближе стоят по парагенезису к районам щелочных пород Los и Pilandsberg, в которых также наблюдается вторичный характер по эвдиалиту и процесс разрушения эвдиалита. Но во многих месторождениях Хибинских Тундр намечается близость и к катаплеитам Норвегии как по парагенезису, так и по времени образования.

Намеченные соотношения являются лишь предварительными, подмеченными на основании довольно сборного и случайного материала Хибинских Тундр. Цель настоящей работы—свести имеющиеся данные для катаплеита для облегчения дальнейшего обследования распространения и выяснения геохимических условий генезиса катаплеита.

Геохимический Институт Академии Наук. 1932.

[1] H. A. Brouver. On the geology of the alcali rocks in the Transvaal. Journ. of Geol., 1918, XXV, 8.

[2] A, Lacroix. Nouv. Arch. du Museum., 1911, Ser. V, t. III.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О ЖАРОСТОЙКОСТИ РАСТЕНИЙ

Н. А. ХЛЕБНИКОВОЙ

(*Представлено академиком* А. А. Рихтером)

Растениеводческой практикой до сих пор не было достаточно обращено внимания на вопрос об отношении различных культурных растений к высоким температурам. Между тем, этот фактор является остро ощутимым в громадных районах юго-востока Союза.

В естественных условиях действие высоких температур обычно сочетается с почвенной и атмосферной сухостью. И, при недостаточности аналитического подхода, реакция растительного организма на эти два фактора обычно учитывается как реакция только на недостаток воды. Такая односторонность практического подхода, очевидно, приводит к чересчур упрощенному решению задачи борьбы с комплексом «засуха». Мы считаем необходимым и своевременным поднять вопрос о расчленении понятия комплексного явления «засуха» и отвести должное место в прикладной физиологии фактору действия высоких температур на культурные растения.

Теоретически этот вопрос достаточно разработан, чтобы ранее полученные выводы предложить в практическом свете. О действии высоких температур на различные растения впервые встречаются указания у Сакса в его известном «Руководстве к опытной физиологии» (20) в 1867 г. Сакс вполне определенно указывает на различное отношение растений к высокой температуре. Объектами исследования для Сакса служили обычные лабораторные растения: *Tradescantia, Vallisneria, Cucurbita, Nicotiana, Brassica*, т. е. материал в данном случае совершенно случайно подобранный. Исследовалось действие высоких температур на ткани, находящиеся в воздухе и при погружении их в нагретую воду (до 51°).[1] Эти опыты вполне определенно указывают, что клетки при полном насыщении водой и невозможности ее испарять погибают значительно быстрее и при более

[1] Температура везде указана по Цельзию.

низкой температуре. Отмирание клеток непосредственно связано с изменением состояния протоплазмы, с ее «оцепенением». По быстроте отмирания Саксу удалось наметить различные физиологические типы по устойчивости к высоким температурам.

Дальнейшую разработку вопроса о значении и влиянии высоких температур на растительный организм мы находим у Пфеффера (18; 1897 г.). Наблюдая сильное перегревание листовой пластинки в жаркие часы дня, Пфеффер занимается разрешением практического вопроса о способности растительного организма к самоохлаждению. Он приходит к выводу, что в естественных условиях активной реакцией растения на перегревание является усиленная транспирация, и устранение этого ответа приводит к отмиранию тканей от высокой температуры, т. е. то, что наблюдал раньше Сакс.

В 1913 г. и ранее в своих работах Лепешкин(9) влиянию фактора «высокая температура» стремится придать вполне законченное математическое выражение. Он рассматривает растительную клетку как коллоидную систему и, основываясь на данных Buglia, дает уравнение, выражающее скорость коагуляции клеточных коллоидов, а вместе с этим и отмирание клетки от высоких температур своей известной «формулой смерти» $T = a - b \lg Z$, где T — температура, Z — время, a и b — коэффициенты, постоянные для данного вида растений.

Эта формула, включая неизменные константы, грешит большим недостатком, отрицая подвижность состояния коллоидов в клетке, и для практических применений требует принципиальных изменений. Но тем не менее она сыграла некоторую роль в прикладной физиологии, например, в работе Гравеса (4) над испытанием действия высоких температур на прорастающие семена.

Фактор «высокая температура» нашел также отражение в оригинальных исследованиях Бозэ (1; 1923) над пульсацией живых клеток тропических растений.

Большое практическое значение в области физиологической сортодиагностики имеют работы Заленского (5; 1922). Исследуя влияние высокой температуры на устьичные клетки различных культурных растений, Заленский обнаружил различную устойчивость устьичного аппарата к этому воздействию у различных физиологических типов. Метод Заленского является косвенным методом определения «засухоустойчивости» растений.

Интересные данные были получены А. А. Рихтером[1] в 1924 г. Сравнивая температуру надземных частей целого ряда растений с температурой

[1] Неопубликованная работа.

окружающего воздуха, Рихтер обнаружил, что многие ксерофиты, и особенно суккуленты, в период сильной инсоляции часто имеют температуру тела значительно выше температуры окружающей среды (воздуха и почвы). При этом отмирания перегретых тканей не наблюдалось.

Таким образом, во всех перечисленных работах достаточно ясно выделено действие высокой температуры на растительный организм. И каждый из исследователей дает свой оригинальный подход к изучению этого фактора: 1) — способность переносить длительное перегревание без отмирания тканей (Сакс), 2) усиленная транспирация как способ к самоохлаждению у нестойких форм (Пфеффер), 3) устойчивость плазменных коллоидов (Лепешкин), 4) устойчивость специфических частей растений — устьичного аппарата (Заленский), 5) способность переносить длительное перегревание без самоохлаждения у стойких форм (Рихтер), 6) учет пульсации клеток как показатель температурного оптимума для развития растений (Бозэ).

Таким образом, почва для выяснения отношения растительного организма к высокой температуре, — «жаростойкости», — вполне подготовлена. И это чувствовалось на последней конференции по засухе (Москва, ноябрь 1931 г.). Намечались неясно выраженные стремления дифференцировать подход к изучению засухи и выделению жароустойчивости.[1]

На необходимость постановки таких проблем указывает в своей последней работе и Красносельская-Максимова (7), правда, выражая это несколько своеобразно — необходимостью изучения «закала» и «захвата».

Летом 1931 г. кафедра физиологии Саратовского государственного университета получила предложение от Быковской бахчевой опытной станции (с. Быково, Н.-Поволжье) провести работу по физиологии бахчевых культур на полях ее селекционных питомников.

В нашу задачу входило изучение основных физиологических процессов различных бахчевых. Ставилось целью подобрать материал для дальнейших физиологических работ в области сортодиагностики.

Особенности жаркой, засушливой полосы Нижнего Поволжья, а также и особенности биологии бахчевых заставили нас итти несколько своеобразным путем в области прикладной физиологии. Невольно пришлось обратить внимание на способность бахчевых переносить без заметного страдания чрезвычайно высокую температуру окружающего воздуха (до 43°) и поверхностного слоя почвы (до 63°), по которому стелются олиственные плети бахчевых.

1 Выступление Тихомирова.

Необычайную стойкость бахчевых к высокой температуре нельзя было объяснить исключительно особенностями водного режима, тем более, что все типичные ксерофиты Нижнего Поволжья, использующие тот же запас воды в почве, находились в крайне угнетенном состоянии.

Расчленив понятие о комплексном явлении «засуха» на два основные комплекса: 1) почвенная и атмосферная сухость и 2) высокая температура воздуха, мы подошли к физиологии бахчевых с точки зрения способности их переносить высокую температуру окружающего воздуха, попутно учитывая водный баланс по скорости отдачи воды.

При изучении жароустойчивости мы применили те методы, вернее подходы, на которые было указано выше в литературном обзоре, с особым развитием выяснения внутреннего состояния изучаемых типов. Учитывались: степень перегревания листовой пластинки, способность к самоохлаждению, способность регулировки устьичного аппарата, скорость подачи воды корневой системой, интенсивность фотосинтеза в зависимости от температуры, состояние белковых коллоидов листа и активность энзиматического аппарата.

Материалом исследования служили селекционные сорта: арбуз № 619 кормовой; тыква — местная серая; дыня-дубовка и кабачок.

Работа проведена в период с 10 июля по 1 сентября 1931 г. Июль был очень жаркий, сухой, t° воздуха достигала 43°; t° поверхностного слоя почвы = 63°. Со средины августа температура воздуха сильно понизилась, до 20°, и довольно часто выпадали осадки.

Посевы арбуза, тыквы, дыни и кабачка в начале июля находились в стадии цветения. Наблюдалось довольно сильное подвядание листьев в жаркие полуденные часы дня у тыквы, дыни и кабачка. Листья арбуза в течение всего дня оставались в тургесцентном состоянии.

Нам казалось интересным сопоставить температуру листовой пластинки различных тыквенных с температурой воздуха и поверхностного слоя почвы.

Температура воздуха промерялась неподвижным химическим термометром, подвешенным на высоте листовой поверхности. Для определения температуры поверхностного слоя почвы служил тот же термометр, погруженный на 0.5 см шариком в почву. Температура листа учитывалась через показания химического термометра, вокруг шарика которого была обернута нижняя поверхность листовой пластинки. Свернутый лист перевязывался тонкой полоской марли, и через 5 минут установившаяся температура отсчитывалась.

10 VII. День ясный; небо чистое; ветер очень слабый.

I опыт = 10 ч. 15′

1. t° воздуха = 40°
2. t° поверхностного слоя почвы = 53°
3. t° листа арбуза = 33.5°
4. t° » тыквы = 35°

5. Отверстость устьичного аппарата по Молишу:

Объект	Спирт	Бензол	Ксилол
1. Лист арбуза	+ + +	+ + +	+ + +
2. » тыквы	+ +	+ +	+ + +

6. Интенсивность транспирации определялась методом Ливингстона — Шталя (16) и приведена в секундах порозовения хлор-кобальтовой бумажки; интенсивность транспирации арбуза принята за 100, и от этой величины выражены в процентах интенсивности транспирации всех остальных бахчевых.

Объект	I опыт в сек.	II опыт в сек.	III опыт в сек.	Среднее в сек.	Относительные величины
1. Арбуз	36″	38.2″	46.6″	40.3″	100
2. Тыква	70	65	—	67.5	59

II опыт — 12 ч. 45′

1. t° поверхностного слоя почвы = 61°
2. t° воздуха = 41°
3. t° листа арбуза = 35°
4. t° » тыквы = 37°

5. Степень отверстости устьичного аппарата:

Объект	Спирт	Бензол	Ксилол
1. Лист арбуза	+ +	+ + +	+ + +
2. » тыквы	+ слабо	+ +	+ + +

6. Интенсивность транспирации:

Объект	I опыт в сек.	II опыт в сек.	Среднее в сек.	Относительные величины
1. Арбуз	50.6″	58″	54.3″	100 %
2. Тыква	80	100	90	60.3

Таким образом уже первые опыты указывают на различное отношение арбуза и тыквы к высокой температуре воздуха и почвы.

Ясно заметно сравнительно большее перегревание листа тыквы при значительно ослабленной транспирации. Но это перегревание не приводит к отмиранию листьев тыквы и только в исключительно знойные полуденные часы выявляется в виде кратковременного, неглубокого подвядания.

Примерно такие же картины мы наблюдаем и в дальнейших опытах с остальными бахчевыми.

18 VII — 14 час.

Тихо, небо ясно, воздух чистый.

1. t° поверхностного слоя почвы = 54°
2. t° воздуха = 43°
3. t° листа арбуза = 36°
4. t° » тыквы = 41°
5. t° » кабачка = 41°
6. t° » дыни = 39°

7. Степень отверстости устьиц

Объект	Спирт	Бензол	Ксилол
1. Лист арбуза	+ (слабо)	+ +	+ + +
2. » кабачка	+	+ +	+ + +
3. » тыквы	+	+ +	+ + +
4. » дыни	+ +	+ + +	+ + +

8. Интенсивность транспирации

Объект	I опыт в сек.	II опыт в сек.	Среднее в сек.	Относительные величины
1. Арбуз	48″	55″	51.5″	100
2. Кабачок	97	89	93	55.4
3. Тыква	116	109	112.5	45.7
4. Дыня	66	76	70	73.6

Как видно из таблицы, скорость транспирации не следует точно за открытостью устьиц. Характерно выделение арбуза по скорости отдачи воды и способности к самоохлаждению в отдельную самостоятельную группу из всех остальных тыквенных.

22 VIII — 12 час.

Небо покрыто на $^1/_4$ легкими облаками. Воздух чистый. Ветер — югозападный, силой в 3 балла[1]

1. t° поверхностного слоя почвы = 47°
2. t° воздуха = 38°
3. t° листа арбуза = 33°
4. t° » кабачка = 40°
5. t° » тыквы = 34.5°
6. t° » дыни = 35°

7. Степень открытости устьиц

Объект	Спирт	Бензол	Ксилол
1. Лист арбуза	—	+	+
2. » кабачка	—	+ +	+ + +
3. » тыквы	—	+ + +	+ + +
4. » дыни	—	+ + +	+ + +

[1] По данным метеорологической станции.

8. Скорость транспирации

Объект	I опыт в сек.	II опыт в сек.	Среднее в сек.	Относительные величины
1. Арбуз	70″	78″	74 ″	100
2. Кабачок	116	100	108	68.5
3. Тыква	130	135	132.5	56.9
4. Дыня	170	145	157.5	47

Повышенная транспирация арбуза заставляла предполагать наличие у него мощной корневой системы и быстроты подачи воды. Это предположение вполне подтвердилось постановкой опыта с выделением пасоки под влиянием корневого давления. Для опыта были взяты примерно одинаково развитые растения арбуза, тыквы, кабачка и дыни, растущие на одном участке, с почвой—сильно супесчаным черноземом. Растения срезались около корневой шейки и на нее надевались при помощи каучука бюретки, заполненные водой. На поверхность воды было внесено 0.5 куб. см. парафинового масла для устранения испарения воды. Опыт длился в течение трех часов. По прошествии этого срока была обнаружена различная скорость подачи пасоки корневой системой у взятых тыквенных. Данные приведены в куб. см. выделенной пасоки:

1. Арбуз = 70 куб. см
2. Кабачок = 3 »
3. Тыква = 10.5 куб. см
4. Дыня = 0 »

Таким образом все приведенные данные вполне определенно указызывают на чрезвычайно сильную нагнетательную способность корневой системы арбуза, которая дает ему возможность, усиливая транспирацию, умерять перегревание листовой пла́стинки. И действительно, температура листа арбуза во всех опытах была значительно ниже температуры листьев остальных бахчевых.

Но картина резко меняется, все бахчевые вполне уравнивается по ходу физиологических процессов при изменении напряжения метеорологических факторов.

29 VIII — 11 час.

Небо покрыто дождевыми облаками. Пасмурно. Ветер северовосточный, силой в 4 балла.

1. t° поверхностного слоя почвы = 19°
2. t° воздуха = 18°
3. t° листа арбуза = 19.5°
4. t° » кабачка = 18.5°
5. t° » тыквы = 18°
6. t° » дыни = 19°

7. Степень отверстости устьиц

Объект	Спирт	Бензол	Ксилол
1. Лист арбуза	—	+	+ +
2. » кабачка	—	+ (очень слабо)	+ +
3. » тыквы	—	—	+ +
4. » дыни	—	+	+ +

8. Интенсивность транспирации

Объект	I опыт в сек.	II опыт в сек.	Среднее в сек.	Относительные величины
1. Арбуз	315″	345″	330″	100
2. Кабачок	370	395	382.5	86.3
3. Тыква	465	490	477.5	69.1
4. Дыня	450	416	438	75.6

Следовательно, в пределах точности метода хлор-кобальтовой пробы можно сказать, что транспирации почти совершенно нет.

Степень отверстости устьиц, а также и температура листовых пластинок у всех растений примерно одинаковы.

Таким образом, физиологическое различие между арбузом и остальными бахчевыми обнаруживается только в знойные, жаркие периоды.

И здесь, может быть, мы можем говорить о некотором приспособлении бахчевых к перенесению «засухи».

Приспособление арбуза при помощи усиленной транспирации, умеряющей перегревание листовой пластинки, довольно обычно. Высокую транспирацию многих ксерофитов наблюдал Максимов(12) в своих исследованиях растительности окрестностей Тифлиса (*Artemisia*, *Stachys*, *Cladochaeta*, *Falcaria* и т. д.) и Васильев(3), изучая физиологию ксерофитов пустыни Кара-Кумы (*Smirnovia turkestana*, *Ammodendron Conollyi*). Максимов и Васильев, пользуясь этим признаком, выделяют подобные растения в особый «засухоустойчивый» тип.

Другую форму «устойчивости» многие исследователи — (Максимов (12, 13, 14, 15), Васильев (2), Туманов (21, 22), Ильин (6) — видят в способности растений переносить легкое подвядание листьев в жаркие часы дня, тем самым сокращая непродуктивную трату воды. Эта форма «засухоустойчивости» Максимовым(15) и Тумановым(21) даже считается «основным способом защиты растения от высыхания», и Туманов (21) определенно указывает, что «засухоустойчивые формы отличаются от неустойчивых способностью переносить длительное завядание более продолжительное время без значительного повреждения».

Но на причину этой способности, на внутренние физиологические процессы, протекающие в растении и обусловливающие собой ту или иную стойкость, до сих пор не было достаточно обращено внимания. Правда, Максимов (13), цитируя Заленского, еще в 1922 г., писал: «опыты Заленского обнаружили, что... растения более засухоустойчивые выдерживают нагревание в течение значительно более долгого времени, чем растения менее устойчивые. Эти наблюдения приоткрывают нам завесу над внутренними физиологическими факторами засухоустойчивости, они показывают, что благодаря каким-то внутренним особенностям в протоплазме... анатомически чрезвычайно близкие формы пшеницы и проса совершенно различно могут относиться к иссушающему действию суховея». Но дальше этих общих предположений в вопросе выяснения причины стойкости к высоким температурам различных растений до сих пор еще ничего не сделано. Нам казалось интересным итти именно в сторону изучения внутренних физиологических процессов, совершающихся в растении, тем более, что по внешним выявлениям их среди исследуемых объектов бахчевых наблюдались резкие различия. Прежде всего мы подошли к учету баланса сухого вещества у различных тыквенных методом Сакса(17). Оказалось, что арбуз и здесь стоит несколько особо в группе бахчевых. В то время как тыква,

кабачок и дыня по накоплению сухого вещества строго следуют за температурой и светом, арбуз как раз дает максимальные цифры ассимиляции в более холодные и пасмурные дни. Ассимиляция всегда учитывалась в период с 11 — 15 час. дня, в часы наибольшей инсоляции и наиболее высокой температуры. Данные сведены в таблицу I и приведены в граммах за 1 час на 1 кв. м.

Таблица 1

Прирост сухого вещества в дневные часы за 1 час на 1 кв. м.

Объект	26 VIII t° воздуха 40°	1 VIII t° воздуха 20°	22 VIII t° воздуха 38°
1. Арбуз	2.5885	4.5125	2.6593
2. Кабачок	4.8700	1.5700	4.2990
2. Тыква	7.4815	3.1600	8.4140
4. Дыня	6.9145	2.5860	6.6800

Ход фотосинтеза в зависимости от температуры можно изобразить графически (фиг. 1), откладывая по линии абсцисс температуру в убывающем порядке и по линии ординат — количество накопленного сухого вещества.

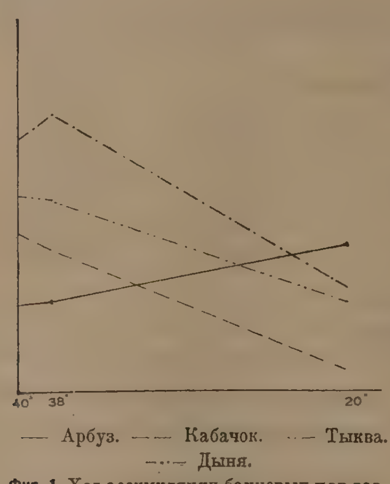
Чесноков и Базырина(23) в одной из последних своих работ очень критически отзываются о методе Сакса, считая, что при помощи затенения листьев невозможно учесть полностью отток ассимилятов, так как в подобных случаях резко нарушается функциональность листа. Они считают, что отток при затенении будет зависеть от целого комплекса условий и в том числе от количества углеводов. Авторы предлагают пользоваться сочетанным методом Сакса и газометрическим.

Несмотря на это мы учитывали ход ассимиляции старым методом Сакса в том его видоизменении, которое было принято в лаборатории проф. Рихтера(17). Тем более, что газометрический метод определения фотосинтеза едва ли применим для бахчевых культур благодаря возможности сильного перегрева листовых пластинок.

Пользуясь методом Сакса для учета интенсивности ассимиляции мы получили достаточно ярко выраженные цифры, которые нас вполне удовлетворяют в нашем ориентировочном подходе к физиологии тыквенных. Поэтому мы считаем вполне возможным пренебрегать неточностью данного метода.

Приведенная таблица и диаграмма резко подчеркивают важность фактора «высокая температура» при прочих равных условиях. Очень характерно следование кривых хода фотосинтеза тыквы, кабачка и дыни за тем-

пературой. Из группы тыквенных выделяется арбуз по направлению кривой ассимиляции, обратной кривой температур и остальных бахчевых. На основании этих данных мы считаем себя вправе выделить тыкву, дыню и кабачок в вполне самостоятельную физиологическую группу «жаростойких» растений и считать арбуз нестойким к высокой температуре. В данном случае наблюдается полное противоречие в понятии «стойкости» с точки зрения комплекса «засуха» и выделенного компонента «высокая температура воздуха».



Фиг. 1. Ход ассимиляции бахчевых при различной t°.

На ряду с ассимиляцией производился учет находящихся в листе восстанавливающих сахаров и активности гидролизирующего фермента — амилазы.

Количество восстанавливающих сахаров определялось по Бланшетьеру в водной вытяжке из тканевого сока листа. Для определения амилазы пришлось несколько видоизменить метод Вильштеттера (19): 10 г листьев растираются в ступке с водой, прибавляется 50 куб. см 1% крахмального клейстера и 15 куб. см фосфатного буфера PH = 6.9. Смесь доводится до 100 куб. см дестиллированной водой и из нее берутся 2 пробы. В одной тотчас же определяются восстанавливающие сахара по Бланшетьеру, а другая оставляется на сутки, и по прошествии срока снова определяются сахара. Прирост количества восстанавливающих сахаров, выраженный в куб. см $^{1}/_{10}$ N $Na_2S_2O_3$ показывает активность амилазы.

Как видно из приводимых данных, количество восстанавливающих сахаров не следует строго за температурой. У дыни, тыквы и кабачка наблюдается колебание в количестве сахара при высокой температуре (фиг. 2).

Между процессом накопления сахаров и активностью амилазы (табл. 3 и фиг. 2) не было обнаружено какой-либо закономерности.

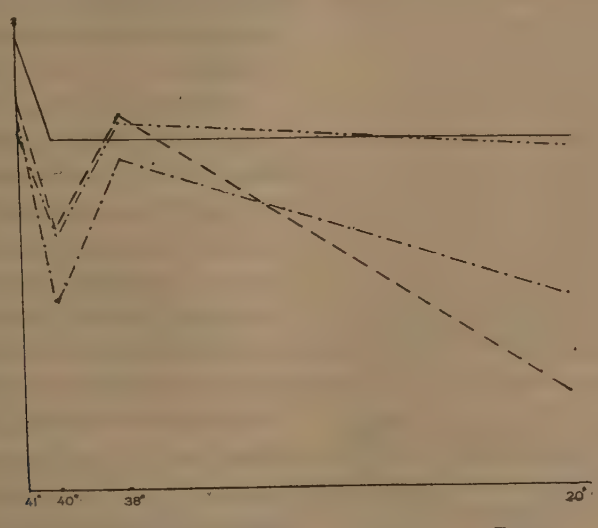
Для большей наглядности зависимости активности амилазы от температуры окружающего воздуха, эти цифры можно представить графически (фиг. 3).

Таблица 2

Количество восстанавливающих сахаров в 2 г сырого веса

Объект	13 VII t° воздуха 40° t° почвы 53°	18 VII t° воздуха 38° t° почвы 50°	26 VII t° воздуха 41° t° почвы 50°	19 VIII t° воздуха 20° холодно
1. Арбуз	13.20	13.17	14.83	13.30
2. Кабачок	11.90	13.63	14.75	9.50
3. Тыква	11.80	12.90	13.63	11·00
4. Дыня	11.75	13.50	13.35	13.20

Интересно отметить, что кривые активности амилазы идут почти параллельно с кривыми фотосинтеза (особенно у арбуза и тыквы), но не совпадают с содержанием восстанавливающих сахаров. Таким образом, можно предполагать, что во время процесса фотосинтеза деятельность амилазы направлена на образование крахмала.



—— Арбуз. — — Кабачек. —· — Тыква. —·· — Дыня.

Фиг. 2. Количество восстанавливающих сахаров у тыквенных при разной t°.

Среди резко очерченной, жаростойкой группы тыквы, судя по приведенным таблице и диаграмме (табл. 3 и фиг. 3), намечается некоторое отклонение от общего типа дыни и кабачка. Это может быть объяснено отчасти несовершенством применяемого метода, отчасти взаимодействием

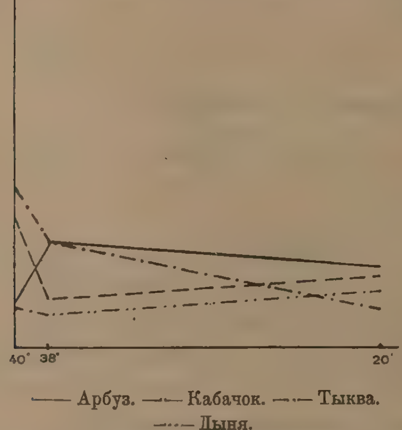
Таблица 3

Активность амилазы в кубических сантиметрах I/10 N $Na_2S_2O_3$

	13 VII t° воздуха 40° t° почвы 53°	18 VII t° воздуха 38° t° почвы 50°	19 VIII t° воздуха 20°
1. Арбуз	1.33	3.15	2.59
2. Кабачок	4.00	1.35	2.40
3. Тыква	4.83	3.15	0.95
4. Дыня	1.20	1.00	1.75

на ряду с высокой температурой и других факторов. Во всяком случае, отклонение от типа в ходе одного физиологического процесса не дает нам основания выделять дыню и кабачок в самостоятельную группу.

Теперь мы переходим к учету состояния белкового комплекса клетки. Нам казалось интересным сравнить стойкость белка этих двух физиологических типов к высокой температуре.



—— Арбуз. —·— Кабачок. —··— Тыква. —···— Дыня.

Фиг. 3. Кривые активности амилазы бахчевых при разной t°.

В литературе есть довольно много указаний на влияние низких температур на химические изменения белков (Гарвей, Шаффнит, Горке, Булерт). Эти авторы вполне определенно указывают, что при понижении температуры идет распад сложных белков вплоть до аминокислот. Горке видит в этом расщеплении причину стойкости растений к низким температурам; им было найдено, что холодостойкие формы при низких температурах имеют всегда наибольшее количество продуктов распада белка.

К учету белкового состояния тыквенных мы подошли суммарно. Не было сделано разделения на белки плазменные и запасные «вакуольные» (по Чибноллу; 24).

Получалась водная вытяжка тканевого белка; центрофугировался весь нерастворимый осадок. Отцентрофугированная жидкость разливалась

в пробирки и на водяной бане нагревалась. Температура водяной бани поднималась довольно медленно, так что температура вытяжки успевала уравняться с температурой бани. Учитывалось первое появление хлопьев коагулировавшего белка. Данные сведены в таблицу 4.

Таблица 4

Температура свертывания белка

Объект	10 VII t° воздуха 40° t° почвы 53°	13 VII t° воздуха 40°	18 VII t° воздуха 38°	19 VIII t° воздуха 20°
1. Арбуз	44°	45°	45°	54°
2. Кабачок	—	65	64	около 60
3. Тыква	65	64	64	» 60
4. Дыня	63	64	64	» 60

Эта таблица наглядно демонстрирует различное отношение выявленных типов бахчевых к высоким температурам. В то время как белки арбуза чрезвычайно чувствительны к повышению температуры и при 45° происходит коагуляция воднорастворимого белка, тыква, дыня и кабачок легко переносят повышение температуры до 60°—65°. Но следует указать, что эти различия наблюдаются только при высокой температуре окружающего воздуха (40°) и почвы (53°). С понижением температуры и вообще с уменьшением интенсивности метеорологических факторов свертывание воднорастворимого белка у дыни, тыквы и кабачка происходит при более низкой температуре 58°—60°.

Для арбуза интересно отметить совершенно обратную картину, именно с понижением температуры окружающего воздуха температура свертывания воднорастворимого белка повышается до 54°. Становится понятным способность «тыквы» переносить значительное перегревание листовой пластинки (до 39°—40°) при сравнительно слабой транспирации. Наоборот, арбуз, не переносящий большего нагревания листа, вынужден обеспечить самоохлаждение усиленной транспирацией.

Параллельно с описанными опытами был поставлен опыт по выяснению влияния температуры непосредственно на листовую пластинку. Для этого срезанные листья арбуза и дыни, в условиях полного доступа воды (листья срезанными черешками помещались в колбы с водой), были поставлены в термостат. Температура листовой пластинки промерялась химическим термометром. В результате опыта получены следующие данные.

Время	t^0 термостата	Арбуз	Дыня
14 ч. 45′	57°	t° листа = 40° заметно подвядание	t° листа = 43° слабое подвядание
15 » 30	60	t° листа = 43° лист сильно завял и по краям началось побурение	t° листа = 45° слабое подвядание
16 » 0	60	t° листа = 45° лист побурел весь, засыхает и с концов свертывается в трубочку	t° листа = 48° слабое подвядание
16 » 02	60	°t листа = 47°	t° листа = 48° подвядание
16 » 05	60	t° листа = 52° лист совершенно засох и свернулся в трубочку	состояние прежнее

Таким образом, листья арбуза не переносят нагревания выше 45°. Характерно медленное поднятие температуры листа до 45°, и по достижении этой «смертельной» температуры наблюдается резкий скачок температуры листа до 47° и 52°. «Смертельная», по Лепешкину, температура арбуза в данном опыте совпадает с температурой коагуляции воднорастворимого белка.

Наблюдать смертельную температуру для дыни не удалось в силу технических затруднений.

Лев и Бокорни(11) считают воднорастворимые белки, «активные» альбумины, составной частью живой протоплазмы. С этой точки зрения

Таблица

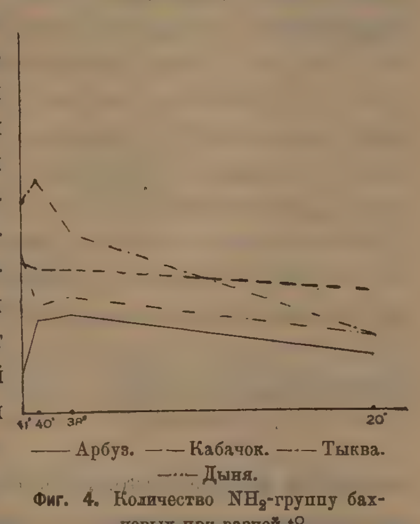
Количество NH_2-групп в кубических сантиметрах I/10 N NaOH на 2 г сырого веса

Объект	13 VII t° воздуха 40°	18 VII t° воздуха 38°	26 VII t° воздуха 41°	19 VIII t° воздуха 20°
1. Арбуз	2.7	2.8	0.9	1.6
2. Кабачок	4.2	4.2	4.4	3.5
3. Тыква	6.8	5.2	6.2	2.2
4. Дыня	3.1	3.3	4.6	2.[illegible]

можно считать температуру свертывания воднорастворимого белка показателем вообще стойкости плазмы к высокой температуре.

В тех же водных вытяжках, где определялась температура белка, учитывалось содержание аминного азота методом формольного титрования. Результаты опытов сведены в таблицу 5 и фиг. 4.

Количество аминного азота стоит в непосредственной связи с жаростойкостью растений. Особенно выпукло это вырисовывается при сравнении хода кривой ассимиляции у тыквы и арбуза (фиг. 5) с кривой содержания NH_2-групп. Тыква чрезвычайно чувствительна к изменению температуры, и с повышением температуры увеличивается количество свободных NH_2-групп. Понижение температуры вызывает, наоборот, резкое уменьшение аминного азота. Кривая содержания NH_2-групп арбуза имеет несколько иное направление, и провал при температуре $= 41°$ легко может быть объяснен частичной коагуляцией белка, который не мог быть переведен в водную вытяжку, так что водная вытяжка арбуза при $t° = 41°$ была несколько беднее свободными NH_2-группами (фиг. 4).



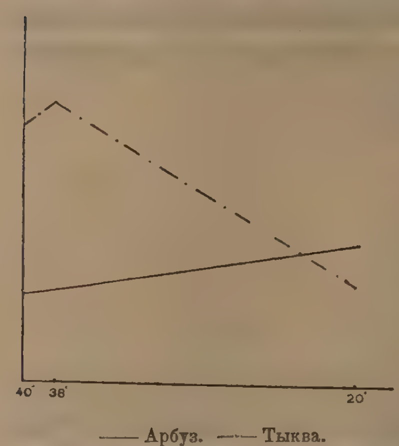
—— Арбуз. — — Кабачок. —·— Тыква. —··— Дыня.

Фиг. 4. Количество NH_2-группу бахчевых при разной t°.

И с другой стороны, есть полная возможность азотистого голодания при очень высоких температурах в силу сниженной ассимиляции. Сопоставляя кривую содержания аминного азота при разных температурах с кривой фотосинтеза при тех же температурах, мы можем отметить их почти полный параллелизм. На основании этих данных можно предположить, что у жаростойкой группы тыквы, использующей наиболее жаркие периоды для наиболее интенсивного фотосинтеза, идет и энергичный синтез белка при повышенной температуре. У арбуза с повышением температуры замедляется ассимиляция углеводов, происходит распад белка и идет нарастание небелкового азота. Распад белка в отсутствии углеводов может итти до аммиачного азота, т. е. формы N, не учитываемой формольно (по Руланду).[1]

[1] Цитировано по Onslow.

Таким образом, учитывая свободные NH_2-группы, мы по существу имеем дело с различными белками: 1) для арбуза — это белок в процессе распада и 2) для тыквы — белок в процессе синтеза. Таким образом, можно сказать, что динамика азотистых веществ у этих двух типов в зависимости от фактора «высокая температура» противоположна. Температура коагуляции воднорастворимых белков у групп «тыква» находится в прямой зависимости от окружающей температуры; то же можно сказать и о наличии аминного азота. У арбуза мы наблюдаем совершенно иные соотношения. Величины этих факторов находятся в обратной зависимости от температуры окружающего воздуха почвы.



—— Арбуз. —·— Тыква.

Фиг. 5. Ход ассимиляции у тыквы и арбуза при разной t°.

Проведенная работа преследовала цель дать ориентировочный материал для дальнейших исследований в области физиологической сортодиагностики бахчевых.

Учитывая специфичность биологии бахчевых, мы обратили особое внимание на влияние фактора «высокая температура» на ход физиологических процессов культурных тыквенных: 1) арбуза, 2) кабачка, 3) тыквы и 4) дыни.

В полевой обстановке производился учет: 1) транспирации, 2) ассимиляции, 3) отверстости устьичного аппарата, 4) температуры листовой, температуры окружающего воздуха и поверхностного слоя почвы.

Попутно в лаборатории производилось определение: 1) количества восстанавливающих сахаров, 2) активности амилазы, 3) количества свободных аминных групп, 4) температуры осаждения воднорастворимого белка.

По всем этим показателям мы получили весьма яркие результаты, которые позволяют все тыквенные расчленить на 2 физиологические группы:

I тип — арбуз, характеризующийся: 1) свертываемостью воднорастворимого белка при 45°, 2) неспособностью листовой пластинки переносить высокую температуру, 3) сравнительно высокой транспирацией как способом к самоохлаждению, 4) незначительным содержанием свободных

NH_2-групп и восстанавливающих сахаров при высоких температурах, 5) ослаблением процесса фотосинтеза при повышенной температуре (оптимум при t° воздуха = 20° и 6) быстротой поднятия воды через корневую систему.

II тип — тыква в противоположность арбузу чрезвычайно стойка к высокой температуре: 1) вытяжка водорастворимого белка выдерживает нагревание в 60°—65°, при этой температуре наблюдается коагуляция белка, 2) выявлена сравнительно слабая транспирация, 3) вдерживает перегрев листовой пластинки до 48° и выше, 4) процесс ассимиляции идет чрезвычайно энергично в жаркие периоды (оптимум при t° воздуха = 40°, 5) в жаркие периоды весьма активная амилаза, направленная на образование крахмала, 6) с повышением температуры увеличивается количество свободных аминных групп и 7) отмечено слабое корневое давление.

Таким образом, на основании приведенных данных мы имеем полное основание отнести тип «тыква» к группе «жароустойчивых» растений, в силу особого состояния внутренних коллоидов клетки, способных переносить высокие температуры даже при очень незначительной транспирации.

И, наоборот, арбуз можно считать растением, нестойким к высокой температуре, неспособным переносить даже незначительное перегревание листовой пластинки и требующим усиленной транспирации как способа к самоохлаждению.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую признательность К. Т. Сухорукову за направление и руководство работой и проф. А. А. Рихтеру за ценные указания и советы при обработке материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bose J. The Physiology of the Ascent of sap (Calcutta, 1923).
2. Васильев И. М. Исследования над засухоустойчивостью у пшениц. Тр. пр. бот. сел. и ген., 1929.
3. — Водное хозяйство растений песчаной пустыни юго-востока Кара-Кума. Там же, 1931.
4. Groves. Temperature and life duration of seed. Bot. Gaz., 1917.
5. Заленский В. Р. и Дорошенко А. В. Физиологическое действие мглы на растения. Обзор деятельности Сар. обл. с.-х. оп. ст., 1923.
6. Ильин. Растение и засуха, 1925.
7. Красносельская-Максимова Т. А. Опыт физиологического анализа захвата при помощи искусственного суховея. Тр. пр. бот. сел. и ген., 1931.
8. Клинг Е. Г. Динамика протеолитических ферментов в озимых злаках и холодостойкость. Ж. оп. агр. ю-в., 1931.

9. Lepeschkin W. W. Zur Kenntnis der Einwirkung supramaximaler Temperatur auf die Pflanzen. Ber. d. Deutsch. Ges., 1913.
10. — Zur Kenntnis der Todesursache der Pflanzen. Ibid., 1912.
11. Loew u. Bokorny. Aktives Eiweiss und Tannin in Pflanzenzellen. Flora. N. F. 9, 1917.
12. Максимов Н. А., Бадриева и Симонова. Интенсивность, транспирации и быстрота расходования водного запаса у растений различных экологических типов. Тр. пр. бот., сел. и ген., 1916.
13. Максимов Н. А. Засухоустойчивость растений с физиологической точки зрения, 1922.
14. Максимов Н. А. Красносельская-Максимова Т. А. Исследования над завяданием растений в связи с их засухоустойчивостью. Тр. Петрогр. общ. естествоиспыт., 1916.
15. Максимов Н. А. Физиологические основы засухоустойчивости растений, 1926.
16. Ничипорович А. А. Определение транспирации растений методом хлор-кобальтовой бумаги. Ж. оп. агр. ю.-в., 1927.
17. Новиков В. А. К физиологии хлопчатника. Там же, 1930.
18. Pfeffer W. Pflanzenphysiologie, L., 1897.
19. Рона. Практикум по физиологической химии, 1930.
20. Сакс. Руководство к опытной физиологии растений (редакция Набеля, 1867).
21. Туманов. Недостаточное водоснабжение и завядание растений как средство, повышающее его засухоустойчивость. Тр. пр. бот., сел. и ген., 1926.
22. Туманов. Завядание растений как метод изучения их засухоустойчивости. Там же.
23. Чесноков и Базырина. Отток ассимилятов из листа. Изв. Акад. Наук, 1930.
24. Chibnoll and Nalon, A. Protein from leaves of the alfalfa plant. Journ. of Biolog. Chem., 1924.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles | Отделение математических и естественных наук

ОБ ОДНОМ НОВОМ СЛУЧАЕ МЕМБРАННОГО РАВНОВЕСИЯ

А. Н. ЦВЕТКОВА

(Представлено академиком П. П. Лазаревым)

Вопрос о мембранном равновесии принадлежит, как известно, к числу значительных вопросов биологии, и классические работы F. G. Donnan'a о мембранном равновесии явились важным стимулом к развитию нашей науки. Однако, как кажется, в науке известен только один теоретически разработанный тип мембранных равновесий; это именно тот тип, который был указан в 1911 г. F. G. Donnan'ом. Поиски новых типов, насколько мне известно, теоретиками не предпринимались, что и внушает мне смелость в нижеследующих немногих строках указать на один новый возможный случай мембранного равновесия.

В ряде моих прежних сообщений [1] я неоднократно отмечал то обстоятельство, что живые организмы должны обнаруживать целую серию специфических свойств, как физические системы, обладающие специфической структурой. Мы рассмотрим здесь случай распределения плотностей газового (или растворенного) вещества по обе стороны проницаемой для этого вещества мембраны, при условии, что по одну сторону этой мембраны среда, в которой находятся молекулы, имеет тонкую структуру, именно, она сконструирована из весьма малых индивидуальных областей; между этими областями существует беспрепятственный обмен молекул. Для простоты мы предположим, что оба пространства по разные стороны мембраны имеют одинаковый объем, и каждое из них вначале содержит одну грамм-молекулу газа или растворенного вещества. Таким образом, вначале плотности по обе стороны мембраны одинаковы и равны ρ. Поставим теперь вопрос, находится ли в этих условиях в равновесии наша система, если, как мы предпо-

[1] См., например, А. Н. Цветков, ДАН-А, 1930, № 11, стр. 267.

ложили, по одну сторону мембраны область нахождения молекул имеет указанную структуру.

Энтропия бесструктурной части выражается в зависимости от плотности формулой:

(1) $$S_1 = k_1 - a_1 \lg \rho.$$

Энтропия части, имеющей структуру, выражается, согласно M. v. Smoluchowsk'ому,[1] другим соотношением, именно:

(2) $$S_2 = k_2 - a_2 \lg \rho - \frac{A}{\rho}.$$

Общая энтропия системы:

(3) $$S = S_1 + S_2 = (k_1 + k_2) - a_1 \lg \rho - a_2 \lg \rho - \frac{A}{\rho}.$$

Представим теперь себе, что мы перенесли определенное количество вещества из одной части системы в другую через разделяющую их мембрану. Плотности в этом случае изменились соответственно на ρ_1 и $-\rho_1$. Примем для определенности, что вещество было перенесено из структурной части системы в бесструктурную. В этом новом состоянии общая энтропия системы, если положить $k_1 + k_2 = k$, выражается формулой:

(4) $$S = k - a_1 \lg (\rho + \rho_1) - a_2 \lg (\rho - \rho_1) - \frac{A}{\rho - \rho_1}.$$

Наша система находится в равновесии, и распределение устойчиво, когда

(5) $$\frac{\partial S}{\partial \rho_1} = 0,$$

т. е.

(6) $$\frac{\partial S}{\partial \rho_1} = -\frac{a_1}{\rho + \rho_1} + \frac{a_2}{\rho - \rho_1} - \frac{A}{(\rho - \rho_1)^2} = 0.$$

[1] M. v. Smoluchowski, Boltzmann-Festschrift, S. 626, Leipzig, 1904.

Иначе говоря, наша система находится в равновесии, и распределение устойчиво, когда ρ_1 удовлетворяет уравнению:

$$\rho_1^2 - n\rho_1 - m = 0, \tag{7}$$

где

$$n = \frac{2a_1\rho - A}{a_1 + a_2} \tag{8}$$

и

$$m = \frac{a_2\rho^2 - a_1\rho^2 - A\rho}{a_1 + a_2}.$$

Корни уравнения (7), вообще говоря, не равны нулю, и, таким образом, равновесие устанавливается при различных значениях плотностей по обе стороны проницаемой для молекул мембраны.

Не входя в дальнейший анализ этого нового случая мембранного равновесия, я ограничусь здесь указанием на то, что самое существование мембранного равновесия в указанных условиях не зависит от химической и физической природы распределяющихся молекул, коль скоро имеют место уравнения (1) и (2). Рассматривая активные молекулы как растворенные в инертном веществе, мы в праве применить и к ним общий результат вышеизложенного краткого рассуждения. Мы должны, таким образом, признать, что концентрации активных молекул в структурном и бесструктурном пространствах, при прочих равных условиях, — не одинаковы, и что наличие структуры само по себе способно оказывать активирующее или дезактивирующее влияние на материю в зависимости от знака и величины коэффициентов n и m в уравнении (7).

Владимир, 1931 г.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

К ВОПРОСУ О КИНЕТИКЕ ФОТОРЕАКЦИИ У *DROSOPHILA MELANOGASTER*

А. Н. ЦВЕТКОВА и В. П. ЭФРОИМСОНА

(*Представлено академиком* П. П. Лазаревым)

Настоящая работа имеет своей целью количественное изучение кинетики фотореакции у *Drosophila melanogaster*. Эта задача в настоящий момент имеет двоякий интерес. С одной стороны, в области учения о реакциях животных до сих пор отсутствует достаточное число строго-количественно изученных фактов, что в высокой степени тормозит развитие рациональной математической теории этой группы явлений. С другой стороны, мы надеемся, что изучение явлений возбуждения у низших животных сможет открыть в дальнейшем целый ряд новых методических возможностей. Так, например, обширная область изучения температурных зависимостей явлений возбуждения открывается для исследователя при работе над низшими животными.

Объектом нашей работы мы избрали самок *Drosophila* в возрасте от 4 до 8 дней из линии $\widehat{yy}$ (линия со сцепленными х-хромозомами), тесно имбредированной на протяжении не менее 25 поколений, что вполне гарантирует генетическую однородность материала.

Для опытов мухи помещались в стеклянный цилиндрический сосуд (длиною 19 см, диаметром 1.3 см). К этому сосуду был прикреплен уровень, так как в виду сильной геотропичности мух было важно следить за строго горизонтальным положением прибора. С двух сторон на расстоянии 3 см от концов трубки имелись отметки, выделявшие равновеликие объемы в трубке.

Источник света располагался таким образом, что лучи шли параллельным пучком вдоль оси нашей цилиндрической трубки.

Каждый опыт производился следующим образом: мухи брались со свежего корма и слабо наркотизировались эфиром для удобства манипулиций.

Определенное число (25) таких слабонаркотизированных мух помещалось через боковое отверстие в вышеописанную трубку и убиралось на несколько десятков минут в темноту. В течение этого времени совершенно исчезал эфирный наркоз мух, и трубка была готова для наблюдений.

Непосредственно после включения света (яркость около 16.000 т. с.) производился подсчет мух, находящихся как в наиболее удаленном от осветителя конце трубки, так и в ближайшем к нему. Затем этот подсчет возобновлялся через каждые 10 сек. в течение нескольких минут непрерывного освещения. После окончания произведенной таким образом серии наблюдений осветитель выключался на 5 мин., в течение которых мухи оставались в темноте. Вслед затем повторялась вся серия наблюдений.

Таблица 1 изображает результат произведенных таким образом наблюдений.

Таблица 1

Время в секундах	Светлый конец	Темный конец	Время в секундах	Светлый конец	Темный конец
0	4.10	4.09	160	11.84	2.18
10	8.30	3.94	170	11.73	2.21
20	11.02	1.89	180	11.70	2.21
30	12.57	1.68	190	12.08	2.21
40	13.30	1.77	200	12.00	2.27
50	13.40	1.71	210	11.98	2.20
60	13.45	1.70	220	11.68	2.21
70	13.57	1.73	230	11.50	2.25
80	13.67	1.75	240	11.35	2.37
90	13.37	1.83	250	11.30	2.36
100	12.67	1.97	260	11.22	2.38
120	12.55	2.00	270	11.26	2.35
120	12.65	2.03	280	11.22	2.50
130	12.28	2.07	290	10.74	2.54
140	12.14	2.14	300	10.80	2.56
150	12.16	2.14			

После 2 час. освещения соответственно: 9.58 и 3.57

Как видно, вслед за быстрым нарастанием фотореакции наблюдается уменьшение числа мух, собравшихся в ближайшем к осветителю конце

трубки. В удаленном от осветителя конце трубки мы наблюдаем как раз обратную картину.

Однако, по истечении большого промежутка времени фотореакция мух не исчезает. Как видно из таблицы, после двухчасового освещения мы наблюдаем распределение мух, близкое к тому, которое имеет место через 5 мин. после включения света.

В пределах только что описанных наблюдений мы располагаем материалами во много десятков тысяч мух. Таким образом, вышеприведенный основной результат получен нами на обширном статистическом материале.

Кроме этого основного наблюдения мы пытались обследовать зависимость фотореакции мух от яркости света. Здесь, к нашему удивлению, мы не смогли обнаружить значительного падения реакции при сильном ослаблении света. Однако, мы не располагаем пока достаточно обширными статистическими материалами для того, чтобы сделать определенное заключение по этому вопросу. Наоборот, производя немногие наблюдения над температурной зависимостью фотореакции, мы могли обнаружить отчетливое изменение ее хода. К этому обстоятельству мы надеемся вернуться в дальнейшем.

Гос. Рентген. институт,
Москва, 1931 г.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles — Отделение математических и естественных наук

МАТЕРИАЛЫ ПО МИКРОФЛОРЕ СЛИЗЕТЕЧЕНИЙ ДРЕВЕСНЫХ ПОРОД

1. Dissophora Nadsonii nov. sp.

Г. С. ФИЛИППОВА

(*Представлено академиком* Г. А. Надсоном)

Организм был выделен из слизетечения пробкового дуба (*Quercus suber*) в Сухуме, в августе 1931 г., Н. А. Красильниковым при высевании на сусло-агар в чашку Петри и передан мне для определения.

Даю описание этого организма, культивируемого на пивном сусло-агаре (7° Ball.) при 17—18° Ц.

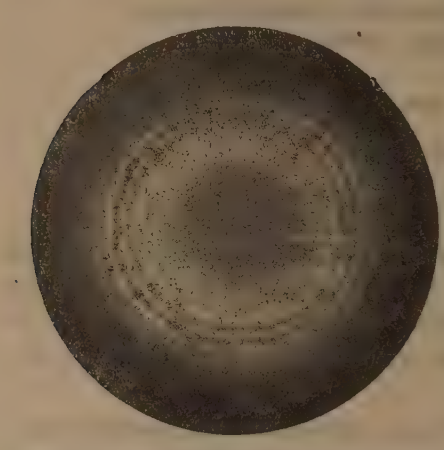
Колония вначале серовато- или грязновато-оливковая, вросшая в субстрат, плотная, типа *Mucor. ramannianus*, приподнимающаяся над субстратом на 1—2 мм; позднее становится более или менее пышной, белого цвета, до 4 мм высотой; с нижней стороны чашки культура желтоватого цвета.

При развитии «гигантской колонии» («псевдоколонии») в чашке наблюдается образование радиальных складок и концентрических колец (фиг. 1—2). Культивирование при 25° Ц дает более быстрое развитие и интенсивнее выраженную окраску как воздушной, так и субстратной частей грибницы. Развитие при 7—10° Ц оказывается замедленным, но в конце развития получается более пышная колония, чем при других температурах. При 36° Ц грибница развивается очень плохо, получаются кораллловидные колонии желтоватого цвета, напоминающие карликовую *Clavaria*.

Субстратные гифы различного диаметра (от 15 до 10 μ) и уже в очень молодом возрасте имеют поперечные перегородки, число которых с возрастом увеличивается. Ветвление беспорядочное; угол между основной и боковыми осями от очень острого до прямого.[1]

[1] Точка зрения Blochwitz'a (Ber. d. deutch. Bot. Ges., 1930) о диагностическом значении этого признака здесь, на субстратном мицелии, не подтверждается.

Гифы, вначале гомогенные, позднее становятся вакуолизированными и, наконец, переполнены крупными каплями жира (табл. 1 — *l*),[1] от которого и зависит окраска нижней стороны культуры. Жир хорошо окрашивается осмиевой кислотой и суданом III. При действии J-JK обнаруживается гликоген. Удается также установить метахроматии по окраске метиленовой синькой. В субстрате, возле грибницы, а часто и на ней выпадают многочисленные кристаллы щавелевокислой извести. Особенно обильно образование последней происходит на картофельном агаре и сусло-желатине.



Фиг. 1. Колония *Dissophora Nadsonii* на сусло-агаре при 17—18° Ц (15 суток).

Очень часто в субстратном мицелии образуются гигантские вздутия грибницы (табл. 1 — m) круглой или неправильно округлой формы, достигающие 25—30 μ в диам.

Кроме того, в старых культурах, в грибнице можно обнаружить цепочки оидий (табл. 1 — f), — это округлые клетки до 15 μ в диам. с тонкой оболочкой и зернистым содержимым. Хламидоспоры на сусло-агаре развиваются редко. Они довольно многочисленны на моркови и картофельном агаре; чаще всего на указанных субстратах они интеркалярного происхождения (табл. 1 — n_1); на сусло-желатине, наоборот, преобладают терминиальные хламидоспоры (табл. 1 — n_2). Интеркалярные хламидоспоры слабо-желтоватой окраски или бесцветны, круглой или широко элипсоидальной, иногда неправильной формы; в случае образования в месте отхождения ветвей они имеют боковые отростки (n_1); величина их 4—10 μ. Терминальные хламидоспоры яйцевидной формы, часто на вершине имеют сосцевидный придаток; в большинстве случаев происходят вторично из оидий, покрываясь дополнительной оболочкой; запасных веществ содержат мало; они несколько больше интеркалярных (8—12—14 μ).

Кроме указанных образований, грибница иногда развивает ризоиды (табл. 1 — *e*), от которых отходят столоны или столонообразные гифы,

[1] На табл. 1: *a* — увеличение около 800; остальное — увеличение 1350; *a* — культура на картофельном агаре на 15-й день.

несущие спорангии. Ризоиды бесцветные, более или менее разветвленные. Столоны бесцветные, большей частью ровные по всей длине, мало ветвленные, ползущие или несколько приподнятые гифы, снабженные многочисленными перегородками, позади которых иногда от особых вздутий отходят спорангиеносцы.



Фиг. 2. Колония *Dissophora Nadsonii* на солодовом агаре при 17—18° Ц, на 20 день.

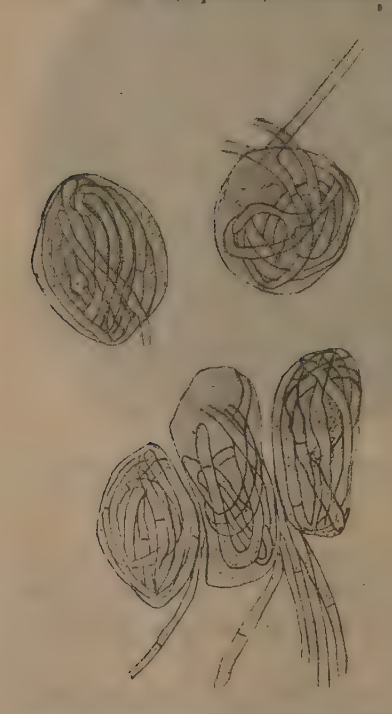
В молодых культурах все спорангиеносцы неразветвлены и отходят или кистью по 3—4—5 ветвей или чаще одиночно. В дальнейшем спорангиеносцы ветвятся, образуя многочленный симподий (табл. 1 —*a*) из 15 и более ветвей, причем новые ветви возникают как почки тотчас позади перегородки. От последующего развития спорангиеносцев (и столонов) зависит наступающее в старых культурах увеличение высоты колонии и ее пышность. Обесцвечивание старых культур наступает в связи с растворением спорангиев, которые обусловливают окраску воздушной грибницы.

Первые спорангиеносцы, отходящие от столона или субстратной гифы, иногда утолщены у основания по типу *Mortierella*; при дальнейшем ветвлении спорангиеносцы ровные (или почти ровные) по всей длине (табл. 1—*a*). Они бесцветны, обязательно имеют одну, реже две, или три перегородки; размеры их 80—250 μ в длину и 3.5—7 μ в ширину. Дистальный конец спорангиеносца как правило не имеет никакого вздутия (табл. 1 — d_1, d_2, d_3), в других случаях он имеет более или менее выраженную колонку, удерживающую на своей поверхности маленький воротничек (d_4 — d_6). Спорангии круглые, с двухконтурной желтовато-грязноватой просвечивающей оболочкой, в зрелом состоянии легко растворимой в воде. Размеры от 10—12 до 33 μ в диаметре (наиболее часто 15—20 μ). Молодые спорангии имеют вид булавовидных вздутий, еще неотделенных перегородкой, содержимое

которых наполнено вакуолизированной мелкозернистой плазмой (b_1). Потом появляется перегородка, содержимое становится более плотным, вакуоли сливаются и позднее исчезают (b_2—b_3).

В следующей стадии содержимое распадается на многочисленные споры и оболочка приобретает свою окраску и растворимость в воде (b_4).

Споры (табл. 1 — *C*) бесцветные, круглые, гладкие, голубоватые, гомогенные или содержащие капельки жира от 1.5—3.5 μ в диаметре (наиболее часто 2.0—2.5 μ). Прорастают легко на различных средах, образуя ростковую трубку в сусле при 25° Ц через 7—10 час.



Фиг. 3. Клетки картофеля, заполненные мицелием *Dissophora Nadsonii*. (Ув. около 800).

Спорангиальный аппарат совершенно не развивается при 30° Ц и выше; при 22—25° Ц наблюдается быстрое (в течение 2-х суток) развитие многочисленных спорангиеносцев, средняя величина которых ниже, чем у развившихся при более низких температурах (18—20° Ц), ветвление их также менее обильное.

Зигоспоры не наблюдались.

Культивирование на других средах обнаруживает следующие особенности.

Сусло-желатина. Складчатая, грязно-серая с оливковым оттенком, хорошо развитая колония, с большим количеством спорангиев на 4-й день. Слабое разжижение желатины. На границе разжиженной и неразжиженной части желатины тонкий сероватый осадок щавелевокальциевой извести. Полное разжижение через 20—30 дней. Субстратный мицелий богат вздутиями 5—25 μ в диаметре, цепочками оидий и терминальными хламидоспорами. Жира мало.

Морковь. Общее развитие слабее предыдущего. Обильные спорангии на 3-й день, вследствие чего колония имеет почти темную окраску. Через месяц обильные интеркалярные хламидоспоры.

Картофель. Грибница менее густая, спорангиеносцы на 5—6 день. Многочисленные вздутия в субстрате; гнездное развитие мицелия в отдель-

ных клетках картофеля без нарушения целости клеточной оболочки, напоминающее своеобразные микросклореции (фиг. 3). Цепочки оидий.

Мясо-пептоновый агар. Колония толстая, слабо распространяющаяся в ширину, с толстым обрубленным краем и концентрическими кольцами. Замедленное образование спорангиеносцев (6—7 день). Многочисленные вздутия. Жира нет.

Картофельный агар. Рыхлая, редкая колония без складок и концентрических колец. Спорангии на 6—7 день, позднее богато разветвленные интеркалярные хламидоспоры. Многочисленные кристаллы щавелево-кальциевой извести.

На жидких сахарных средах (раствор Ганзена + 3% углевода) в трубках Дунбара газообразования не наблюдается. Мощность развития организма на различных углеводах неодинакова. В то время как на глюкозе на 3-й день образуется толстая пленка с многочисленными спорангиеносцами, на лактозе и декстрине только слабая и едва заметная, без воздушной грибницы. Углеводы по степени пригодности для питания располагаются в следующий ряд:

Глюкоза > Манноза > Галактоза / Мальтоза > Сахароза > Лактоза / Декстрин

т. е. наиболее усвояемы моносахариды и наименее полисахариды.

При совместных культурах этого грибка с *Mucor mucedo* и *Mucor hiemalis* он обнаруживает явления факультативного паразитизма, проникая внутрь гиф *Mucor'а*. В месте развития паразита наблюдается полегание спорангиеносцев. Кроме того у *Mucor'а*-хозяина наблюдаются уродливые вздутия спорангиеносцев и многочисленные азигоспоры, образующиеся в результате задержки слияния уже образовавшихся гамет; поэтому 2 азигоспоры, разные по величине, всегда расположены рядом.

Вышеописанный организм, имеющий постоянно септированный воздушный и субстратный мицелий, мог бы быть отнесен к *Hyphomycetes*, если бы у него не было несвойственного последней группе типичного спорангия. Это несомненно представитель *Mucorales* и всего уместнее его поместить в сем. *Mortierellaceae*, хотя у него иногда наблюдается вздутие конца спорангиеносца по типу недоразвитой колонки. Как известно, к *Mortierellaceae* относится 4 рода: *Mortierella* Coem., *Herpocladiella (Herpocladium)* Schr., *Dissophora* Thaxt. и *Haplosporangium* Thaxt. Отсутствие перегородок у *Mortierella* и *Herpocladiella*, характерная веретеновидная форма спорангиеносцев и почти всегда малое количество спор в спорангии

у первого рода и спиралевидная изогнутость спорангиеносцев у второго рода не позволяют сблизить найденную форму с этими родами и, тем более, с *Haplosporangium*, имеющим редуцированный спорангий с 1—2 спорами, и принадлежность которого к *Mucorales* является невполне доказанной.

Ближе всего наш организм стоит к роду *Dissophora*, хотя и значительно отличается от единственного представителя этого рода — *Dissophora decumbens* Thaxt.[1] Мы включаем найденный нами организм в род *Dissophora* на том основании, что как там, так и здесь существуют перегородки в спорангиальном аппарате и наблюдается возникновение спорангиеносцев на подобие почек; что же касается сходства спорангия и спорангиеносца у *Dissophora* с *Mortierella*, то оно наблюдается у нашего организма только иногда в ранней стадии. Остальные признаки несходства видового характера и частично могут быть следствием недостаточного изучения *D. decumbens*, так как автор (Thaxt.) установил диагноз на мертвом и сухом материале.

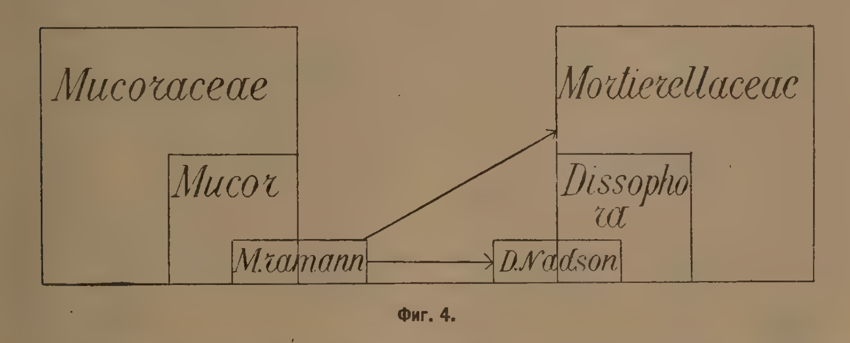
От *D. decumbens* найденный организм отличается следующими признаками.

Dissoph. decumbens Thaxt.	*Dissophora* sp. nov.
Плодоношения чисто белые.	Плодоношения грязновато-оливкового цвета, становятся белыми в старых культурах после разрушения спорангиев.
Спорангиеносцы как у *Mortierella*, возникают неправильно со всех сторон (гифы) позади растущей верхушки; в зрелости часто септированы; редко разветвлены. Размер: 100—150 μ × 8 μ.	Спорангиеносцы возникают от субстратной гифы или столона кистью до 5 штук или одиночно; в дальнейшем ветвятся симподиально, образуя до 15 и более ветвей. Размер: 80—250 μ × 3.5—7 μ.
Спорангии шарообразные, 17—23 μ.	Спорангии шарообразные, 10—33 μ (наиболее часто 15—20 μ).
Колонка отсутствует.	Колонка отсутствует невсегда и в некоторых случаях наблюдается образование редуцированной колонки.
Споры шарообразные или неправильные, несколько угловатые от давления, около 4 μ.	Споры шарообразные, угловатых спор не наблюдается, размеры 1.5—3.5 μ (наиболее часто 2—2.5 μ).
Ризоиды, хламидоспоры, оидии и зигоспоры неизвестны.	Наблюдаются ризоиды, интеркалярные и терминальные хламидоспоры и цепочки оидий. Зигоспоры неизвестны.

На основании приведенного описания Thaxter'а, а также сравнения с прекрасными рисунками этого автора, найденная форма не может быть отождествлена с *D. decumbens*, а является новым видом, который предлагаю в честь ак. Г. А. Надсона назвать *Dissophora Nadsonii*.

[1] Thaxter, R. New or peculiar *Zygomycetes*. Bot. Gaz. Vol. 58, 1914, p. 361.

На основании многих соображений предполагают, что семейство *Mortierellaceae* произошло от *Mucoraceae* путем редукции колонки. *D. Nadsonii*, имея одновременно оба типа плодоношений, является организмом, в котором процесс редукции еще не вполне завершен, вследствие чего он и не укладывается в рамки семейства *Mortierellaceae*. С другой стороны, *Mucor ramannianus* по отношению к роду *Mucor* занимает подобное же положение. Он имеет спорангиеносцы по форме сходные со спорангиеносцами *Mortierella* и в некоторых случаях (правда, исключительных) развивает спорангии, лишенные колонки.[1]



Фиг. 4.

Общий вид грибницы, как микро- так и макроскопический, отделяет его от типичных представителей рода *Mucor* и тесно сближает с *Mortierellaceae*.

На основании многих черт сходства в строении указанных организмов можно предположить, что филогенетический путь *Mortierellaceae* прошел не через *Chaetocladiaceae* — *Thamnidiaceae*, как это представлено, например, на схеме Gäumann'a,[2] а непосредственно через *Mucor ramannianus* или близкие к нему (теперь неизвестные формы). Во всяком случае из всех известных представителей *Mucorales* он является наиболее близким к этому семейству. Взаимоотношения названных организмов могут быть представлены следующей схемой (фиг. 4).

Есть еще один признак, отделяющий *M. ramanniaus* от *Mortierellaceae* (и от *Mucoraceae*) — это его розовая окраска. Однако, последнее свойство не является противоречием, так как за последнее время установлено, что у разных организмов[3] окраска может быть изменена или совсем утрачена,

[1] Г. Филиппов. «Болезни растений», 1928 г.

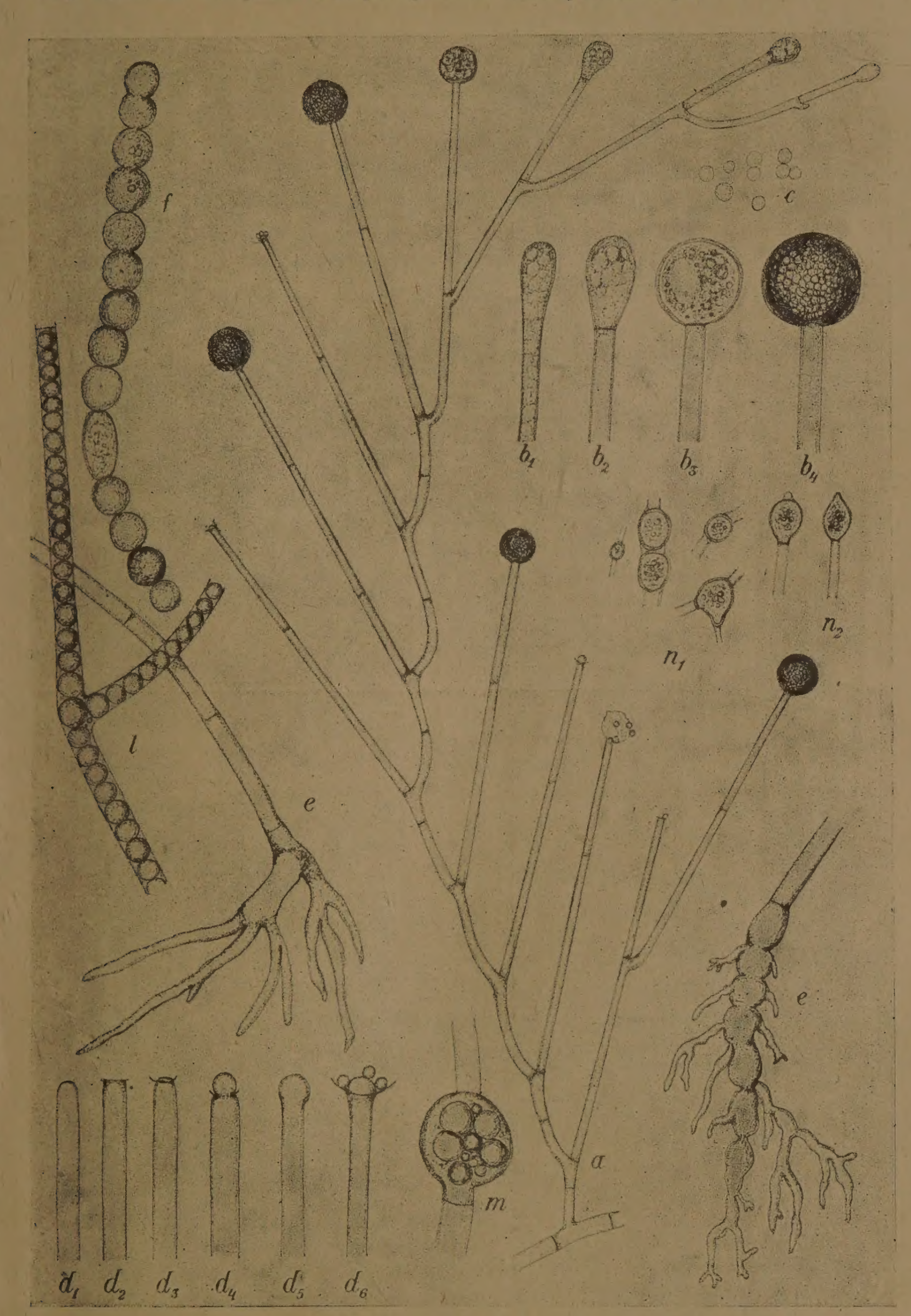
[2] Gäumann, Comparative Morphology of Fungi, 1931.

[3] Надсон и Филиппов. ДАН-А, 1931, № 1—2; Вестн. Рентгенологии, т. X, 1932 г.

и это изменение (или утрата) может наследоваться во многих поколениях. Что касается бесцветных рас *M. ramannianus*, то они встречаются иногда в природе и могут быть получены из типичной формы также экспериментально, под влиянием паразитизма и некоторых других факторов. В нашем распоряжении имеются несколько таких рас. Подробное описание их будет дано в одном из следующих сообщений.

Микробиологическая Лаборатория
Академии Наук СССР.
1932.

Г. С. Филиппов. Материалы по микрофлоре слизетечений древесных пород



Оглавление — Sommaire

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала.
Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original.

Цена 3 руб.